ORSAY
N° d'ordre :
2445

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Gilles REQUIN
Agrégé de l'Université

Sujet de la Thèse

METHODES VARIATIONNELLES D'ETUDE DE L'EVOLUTION D'UN PLASMA. APPLICATION AU TOKAMAK

Soutenue le 26 Mai 1981 devant la Commission d'Examen

MM.	J.L. DELCROIX	Président
	M. FITAIRE	
	J.P. GIRARD	
	R. PELLAT	Rapporteur
	A. SAMAIN	Directeur de Recherche
	E. CANOBBIO	Invité

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547321_0019

ORSAY
N° d'ordre:
2445

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Gilles REQUIN
Agrégé de l'Université

Sujet de la Thèse

METHODES VARIATIONNELLES D'ETUDE DE L'EVOLUTION D'UN PLASMA. APPLICATION AU TOKAMAK

Soutenue le 26 Mai 1981 devant la Commission d'Examen

MM.	J.L. DELCROIX	Président
	M. FITAIRE	
	J.P. GIRARD	
	R. PELLAT	Rapporteur
	A. SAMAIN	Directeur de Recherche
	E. CANOBBIO	Invité

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

à Florence

Cette thèse a été préparée lors d'une période de détachement au Commissariat à l'Energie Atomique, dans le cadre d'un Contrat Temporaire de Thèse. Je travaillais au Département de Recherches sur la Fusion Contrôlée, au Centre d'Etude Nucléaire de Fontenay-aux-Roses, et je profite de cette occasion pour en remercier tous les membres de l'accueil amical et l'aide que j'y ai trouvé.

Monsieur A. SAMAIN était mon directeur de recherches. Durant ces trois années, tel un guide patient, il m'a conduit par les voies les plus accessibles, ne ménageant ni son temps ni sa peine pour me relancer à chaque difficulté ; sans lui cette thèse ne serait pas. A la veille de quitter la Recherche, je tiens aussi à le remercier de son apport dans ma formation de physicien dont j'espère à mon tour pouvoir faire profiter mes élèves.

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur J.L. DELCROIX qui a accepté de présider le Jury, Messieurs M. FITAIRE et J.P. GIRARD qui ont accepté d'en faire partie et spécialement Monsieur R. PELLAT, qui a bien voulu se charger de la tâche de rapporteur. Je tiens aussi à remercier tout particulièrement le Docteur E. CANOBBIO qui s'est déplacé de fort loin pour se joindre au Jury.

RESUME

L'étude de l'équilibre et de l'évolution d'un plasma confiné magnétiquement est grandement simplifiée lorsqu'on remarque que le confinement confère aux particules d'un plasma, avec une excellente approximation, des trajectoires intégrables, avec trois constantes du mouvement indépendantes. Cette propriété permet, dans une description Hamiltonienne du mouvement des particules, d'introduire un système de variables angulaires et d'action simplifiant grandement les équations du mouvement.

Dès lors, en reprenant un principe variationnel de minimum de production d'entropie proposé par plusieurs auteurs [1] [2] [3] , équivalent aux équations de Fokker Planck, nous montrons que ce principe peut prendre une forme simple dans l'espace des constantes du mouvement. Nous appliquons ce principe variationnel à des situations de plus en plus compliquées, mais plus réalistes, en examinant successivement l'effet des collisions, l'effet d'une dépendance temporelle de l'Hamiltonien intégrable gouvernant le mouvement et surtout l'effet d'une perturbation résonante de l'Hamiltonien qui complique en général profondément le mouvement des particules en modifiant la topologie de leurs trajectoires. Nous éliminons mathématiquement la structure détaillée des fonctions de distribution des particules au voisinage des surfaces de résonance, laissant au principe variationnel de minimum de production d'entropie une forme simple, en ce sens qu'il ne porte que sur des variables régulières ; les extensions successives correspondent à des termes additionnels de production d'entropie dont l'expression peut être mise sous une forme standard adaptable à de multiples situations. Le principe variationnel permet alors de suivre l'évolution dans le temps des principales caractéristiques des fonctions de distribution, notamment la densité et la température d'une assemblée de particules confinées.

Avec une perturbation résonante sur une seule surface continue de l'espace des phases, nous retrouvons sous forme standard les productions d'entropie du type Landau [10] et Zakharov et Karpman dues à l'effet direct de résonance[11]

Notre formalisme fournit aussi la valeur résiduelle de la production d'entropie, qui joue en particulier un rôle très important dans certains transports néoclassiques : diffusion des impuretés dans le régime de Pfirsch et Schlüter, viscosité... . Il couvre aussi des situations résonantes où le comportement des particules est adiabatique sauf près de la séparatrice du domaine "piégé" induit par la perturbation. Dans une seconde généralisation nous étendons encore le principe variationnel d'une part au cas de deux perturbations agissant sur des surfaces de résonances très voisines et d'autre part dans une situation où un ensemble de perturbations non corrélées sont présentes. Le premier cas met en évidence la forte production d'entropie qui apparaît du fait de la résonance non linéaire des particules piégées par la première perturbation avec la seconde. Ce phénomène joue par exemple un rôle fondamental dans la théorie néoclassique : il contrôle la diffusion des particules localisées dont les surfaces de dérive ne restent pas voisines d'une surface magnétique. Le second cas est bien entendu la situation stochastique ; les conditions standard d'appliquabilité du formalisme donnent un éclairage intéressant à cette situation. Dans les deux situations il est encore possible de suivre l'évolution dans le temps des fonctions de distribution des particules soumises à ces perturbations par un principe d'extrémum portant sur des variables régulières.

Enfin nous étudions la relation qui existe entre le principe d'extrémum de production d'entropie, qui permet de calculer l'évolution irréversible du plasma, et l'autocohérence du champ électromagnétique produisant des trajectoires intégrables d'une part et des perturbations électromagnétiques se superposant à ce champ d'autre part. Nous donnons des principes variationnels permettant de déterminer ces champs lorsque les conditions aux limites sont connues. Appliquant ces principes variationnels à l'étude des modes électromagnétiques pouvant prendre naissance dans le plasma, nous aboutissons à une forme standard d'équation de dispersion.

Dans la seconde partie, nous utilisons ce formalisme pour l'étude de divers problèmes de transport et d'équilibre du Tokamak. Nous retrouvons d'abord les coefficients néoclassiques de transport de chaleur, et nous pouvons étendre le calcul de ces coefficients en présence d'impuretés dans le plasma, dans des régimes mixtes de collisionnalité. Nous considérons alors l'influence (souvent dominante) des corrugations du champ magnétique dues à la structure discrète des bobinages créant le champ toroïdal. Notre formalisme met en évidence, outre le régime habituel de diffusion des particules localisées à travers les surfaces

magnétiques, les divers régimes de diffusion applicables lorsque les corrugations ne réalisent pas un piégeage effectif des particules. Les coefficients de diffusion calculés ont été introduits dans un code de simulation numérique utilisé pour étudier les résultats prévisibles dans diverses machines Tokamak [27]. Nous examinons ensuite l'équilibre d'une configuration magnétique en présence d'ilots magnétiques perturbant la topologie des surfaces magnétiques. Nous montrons comment on peut suivre l'évolution dans le temps d'une telle configuration. Le formalisme permet de calculer les vitesses de rotation autour de l'axe principal des différentes familles d'ilots, et le couplage de ces rotations avec la vitesse de rotation d'ensemble du plasma, il apparaît qu'une mise en rotation du plasma autour de l'axe principal est rendue possible par ce couplage.

Nous utilisons de nouveau notre formalisme pour étudier les possibilités qu'offre une mise en rotation du plasma autour de l'axe principal, du point de vue du comportement des impuretés et de la stabilité. Nous recalculons d'abord les coefficients néoclassiques en présence d'une telle rotation, en particulier la viscosité du plasma et le transport des impuretés. Il ressort de cette analyse que le transport néoclassique des impuretés du plasma dans le régime Pfirsch et Schlüter est augmenté de façon significative par les effets de force centrifuge et peut être dirigé vers l'extérieur, aboutissant ainsi à une purification du plasma. La stabilité du plasma vis-à-vis des modes d'interchange et des modes de dérive dus aux particules circulantes n'est pas affectée pour des valeurs raisonnables de la rotation mais on peut attendre un effet de stabilisation des modes dus aux ions piégés [35]. Nous examinons enfin des méthodes de mise en rotation du plasma ; en particulier il apparaît possible en principe de convertir directement dans un réacteur à fusion une partie de l'énergie des particules α en énergie de rotation.

Le problème de la purification d'un plasma Tokamak a été abordé d'une autre manière en analysant les possibilités d'établissement d'un "divertor" pour les impuretés, obtenu en appliquant à ces impuretés un champ HF à leur fréquence cyclotronique de manière à les faire entrer dans un domaine de l'espace où elles ne sont pas confinées [42]. Enfin nous examinons les possibilités d'un divertor obtenu en ergodisant les lignes de flux dans une couche mince au bord du plasma ; trois avantages sont en principe attendus d'un tel dispositif : contrôler et réduire la température du plasma au bord et diminuer ainsi l'énergie des particules atteignant l'environnement matériel ; contrôler la puissance atteignant cet environnement sur une plus grande surface ; réaliser une certaine purification de la couche ergodique.

A) - PREMIERE PARTIE

METHODES VARIATIONNELLES POUR L'ETUDE DE L'EVOLUTION D'UN PLASMA

A.I - INTRODUCTION

1) Position du problème

L'étude d'un plasma confiné comprend en général l'étude de la mise en équilibre et de l'évolution de plusieurs assemblées de particules en présence d'un champ électromagnétique autocohérent et de collisions. On décompose alors l'étude d'une évolution fondamentale du plasma en deux étapes : la traduction de l'équilibre à chaque instant des assemblées dans le champ autocohérent, et l'évolution de ces assemblées du fait des coefficients de transport. Plus précisément la connaissance des caractéristiques principales des fonctions de distribution $\mathcal{F}_\alpha$ de chaque assemblée de particules permet de déterminer le champ self consistant de potentiels $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{V})$ présent dans le plasma. Les équations de Fokker Planck permettent de calculer l'évolution de ces caractéristiques dans le temps. Dans ce schéma les fonctions de distribution et le champ autocohérent dépendent en général lentement du temps, mais peuvent être des fonctions quasi périodiques du temps $g(t, \omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t)$ évoluant lentement par rapport à la variable t.

Cette méthode d'étude devient discutable lors de l'apparition de modes instables. Certains ont une forme telle qu'il est possible de revenir à la situation de base en ajoutant une phase $\omega_n t$ dans l'expression des fonctions de distribution et des potentiels électromagnétiques ; un tel exemple est fourni par la création d'un ilot magnétique dans la configuration d'un Tokamak ; mais cette situation reste assez particulière. En général l'apparition d'un mode instable dégénère en un mouvement accéléré de l'ensemble du plasma ou surtout en une turbulence. De plus, même en l'absence de turbulence , l'évolution du plasma peut créer des gradients dans l'espace des phases; ceux-ci entraînent alors des écarts à l'équilibre thermodynamique de plus en plus grands et accèlerent donc cette évolution ; un exemple d'une

telle situation est apportée par l'ilot q = 1, dans une configuration magnétique Tokamak, qui tend à créer une couche limite de reconnection aboutissant finalement à une disruption.

Nous plaçant maintenant dans des situations où la méthode d'étude générale est valable, nous allons montrer qu'elle peut être mise sous la forme de l'utilisation de principes variationnels très généraux. Ces principes variationnels dans leur généralité sont cependant d'un emploi difficile, notamment pour les plasmas que nous voulons étudier, c'est-à-dire des plasmas confinés et chauds, et donc à faible collisionnalité, où les effets de trajectoires des particules individuelles sont prépondérants. On peut cependant tirer parti du fait que, dans les plasmas confinés, les trajectoires sont approximativement intégrables, c'est-à-dire sont approximativement dessinées sur des tores à trois dimensions dans l'espace des phases. Chaque tore est spécifié par trois constantes du mouvement K_1, K_2, K_3 ; l'Hamiltonien d'un système de particule d'une espèce donnée peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, t) \# h(K_1, K_2, K_3, t)$$

Un point essentiel est que les fonctions de distribution des assemblées de particules d'espèce α , $\mathcal{F}_\alpha$ sont aussi approximativement des fonctions des variables K_1, K_2, K_3 c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t) = f_\alpha(K_1, K_2, K_3) + \delta\mathcal{F}_\alpha$$

où $\delta\mathcal{F}_\alpha$ est une perturbation, et où les fonctions f_α peuvent être convenablement normalisées, de façon qu'elles donnent les informations essentielles sur les vraies fonctions de distribution des particules $\mathcal{F}_\alpha$, en particulier qu'elles permettent le calcul du champ électromagnétique autocohérent.

L'objectif de notre travail dans cette première partie est de réduire les principes variationnels généraux à des formulations standards utilisant seulement les fonctions simples f_α et permettant le calcul de ces fonctions et du champ autocohérent. On diposera ainsi d'un outil assez puis-

sant et encore assez général pour l'étude des plasmas chauds confinés, permettant alors d'aborder d'un même point de vue une grande variété de problèmes pratiques rencontrés dans les plasmas de fusion confinés dans une configuration Tokamak.

2) Principes généraux d'extremum donnant l'évolution d'un plasma

Il est souvent avantageux, à la suite de plusieurs auteurs [1] [2] [3], de mettre sous forme variationnelle les équations de Fokker Planck fixant l'évolution dans le temps de la fonction de distribution $\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ de l'assemblée de particule d'espèce α. Une façon simple de le faire est de mettre en évidence l'écart à l'équilibre thermodynamique de l'assemblée considérée en écrivant sa fonction de distribution sous la forme :

$$\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t) = A_\alpha \exp - \frac{\mathcal{H}_\alpha - \mathcal{U}_\alpha}{T} \qquad (1)$$

où A_α et T sont des constantes, $\mathcal{H}_\alpha$ est l'Hamiltonien exact décrivant le mouvement des particules d'espèce α et $\mathcal{U}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ reflète l'écart à l'équilibre thermodynamique. L'ensemble des équations de Fokker Planck est alors équivalent à poser que la fonctionnelle des variables $\underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$:

$$\dot{\mathcal{M}}(\underline{\mathcal{U}}) = \sum_\alpha \frac{2}{T} \int \cdots \frac{d\mathcal{F}_\alpha}{dt}\, \underline{\mathcal{U}}_\alpha \, d_3x \, d_3p + \dot{S}(\underline{\mathcal{U}}) \qquad (2)$$

est extremum pour toutes les variations de la variable $\underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ au voisinage de $\mathcal{U}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$. Dans l'expression de $\dot{\mathcal{M}}(\underline{\mathcal{U}})$, le terme $d\mathcal{F}_\alpha/dt$ est la variation de $\mathcal{F}_\alpha$ le long des trajectoires :

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}}$$

et la fonctionnelle $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ est définie par :

$$\dot{S}(\underline{\mathcal{U}}) = \frac{1}{2T^2} \sum_{\alpha\alpha'} \int \cdots X_{rs}(\vec{x},\vec{p},\vec{p}';t,\alpha,\alpha') \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)}{\partial p_r} - \frac{\partial \underline{\mathcal{U}}_{\alpha'}(\vec{x},\vec{p}',t)}{\partial p'_r} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)}{\partial p_s} - \frac{\partial \underline{\mathcal{U}}_{\alpha'}(\vec{x},\vec{p}',t)}{\partial p'_s} \right) \mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)\, \mathcal{F}_{\alpha'}(\vec{x},\vec{p}',t)\, d_3x\, d_3p\, d_3p' \qquad (3)$$

où [4], [5] :

$$X_{rs}(\vec{x},\vec{p},\vec{p}',t,\alpha,\alpha') = 2\pi\, e_\alpha^2 e_{\alpha'}^2\, \mathrm{Log}\Lambda \cdot \frac{w^2\delta_{rs} - w_r w_s}{w^3} \qquad (4)$$

$\vec{w}$ est la vitesse relative des particules $\alpha(\vec{x},\vec{p})$ et $\alpha'(\vec{x},\vec{p}')$:

$$w_r = \frac{\partial \mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)}{\partial p_r} - \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha'}(\vec{x},\vec{p}',t)}{\partial p'_r}$$

$\mathrm{Log}\Lambda$ est le logarithme Coulombien et e_α ($e_{\alpha'}$) est la charge de la particule α (α') . Notons dès à présent que :

$$X_{rs}(\vec{x},\vec{p},\vec{p}',t,\alpha,\alpha') = X_{sr}(\vec{x},\vec{p},\vec{p}',t,\alpha,\alpha') = X_{rs}(\vec{x},\vec{p}',\vec{p},t,\alpha',\alpha)$$

$$X_{rs}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)}{\partial p_s} - \frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha'}(\vec{x},\vec{p}',t)}{\partial p'_s}\right) = 0 \qquad (5)$$

Les coefficients de diffusion $\langle \delta p_r\, \delta p_s \rangle$ dans l'espace $\vec{p}$ de la quantité de mouvement $\vec{p}$ pour les particules de l'assemblée α sont données par :

$$\langle \delta p_r\, \delta p_s \rangle = 2 \sum_{\alpha'} \iiint \mathcal{F}_{\alpha'}(\vec{x},\vec{p}',t)\, X_{rs}(\vec{x},\vec{p},\vec{p}',t,\alpha,\alpha')\, d_3 p' \qquad (6)$$

La valeur $\dot{S}(\mathcal{U})$ de la fonctionnelle $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ pour la valeur $\underline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ est le taux de production d'entropie dans le plasma. La quantité $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ est une forme quadratique en $\underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ et on peut dès lors introduire l'opérateur linéaire symétrique $\mathfrak{D}(\underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t))$ tel que :

$$\dot{S}(\underline{\mathcal{U}}) = -\frac{1}{T} \sum_\alpha \int \ldots \mathfrak{D}(\underline{\mathcal{U}}_\alpha)\, \underline{\mathcal{U}}_\alpha\, d_3 x\, d_3 p \qquad (7)$$

cet opérateur est symétrique au sens suivant :

$$\sum_\alpha \int \ldots \mathfrak{D}(\underline{\mathcal{U}}_\alpha)\, \underline{\mathcal{V}}\, d_3 x\, d_3 p = \sum_\alpha \int \ldots \mathfrak{D}(\underline{\mathcal{V}})\, \underline{\mathcal{U}}_\alpha\, d_3 x\, d_3 p$$

$$= -\frac{1}{2T} \sum_{\alpha,\alpha'} \int \ldots X_{rs} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_\alpha}{\partial p_r} - \frac{\partial \mathcal{U}_{\alpha'}}{\partial p'_r}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_s} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p'_s}\right) \mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)\, \mathcal{F}_{\alpha'}(\vec{x},\vec{p}',t)\, d_3 x\, d_3 p\, d_3 p' \qquad (8)$$

Du principe variationnel (2) il découle que :

$$\frac{d\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)}{dt} = \mathcal{D}\left(\underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)\right)$$

$\mathcal{D}\left(\mathcal{U}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)\right)$ est alors identifié à l'opérateur de collision de Fokker Planck :

$$\mathcal{D}(\mathcal{U}) = -\frac{\partial}{\partial p_r}\left(<\delta p_r>\mathcal{F}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_r \partial p_s}\left(<\delta p_r\,\delta p_s>\mathcal{F}\right)$$

D'autre part nous avons d'après (5) et quelles que soient les variables $A_r(\vec{x})$, $B(\vec{x})$, $C_\alpha(\vec{x})$:

$$\mathcal{D}\left(A_r(\vec{x})\,p_r + B(\vec{x})\,\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t) + C_\alpha(\vec{x})\right) = 0 \qquad (9)$$

qui exprime la conservation de la densité de quantité de mouvement totale et de l'énergie des particules.

La fonctionnelle $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ et l'opérateur $\mathcal{D}$ dépendent en principe de $\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ et $\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ mais on peut remarquer que dans un problème d'évolution, la fonction de distribution $\mathcal{F}_\alpha$ peut être remplacée par une valeur approchée. Ceci est dû au fait que $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ est toujours positive ou nulle quelque soit $\mathcal{F}_\alpha$ et ne s'annule que si $\underline{\mathcal{U}}$ est de la forme $\underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t) = A_r(\vec{x})\,p_r + B(\vec{x})\,\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t) + C_\alpha(\vec{x})$. Si donc on remplace $\mathcal{F}_\alpha$ par $\mathcal{F}_\alpha + \delta\mathcal{F}_\alpha$ avec $\delta\mathcal{F}/\mathcal{F} \ll 1$, la quantité $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ est calculée avec une faible erreur relative de l'ordre de $\delta\mathcal{F}/\mathcal{F}$. Ainsi le principe variationnel $d\left(\dot{\mathcal{H}}(\underline{\mathcal{U}})\right) = 0$ peut être encore appliqué même si $\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ figurant dans $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ est connue avec une erreur relative faible.

Si l'Hamiltonien $\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ et la fonction de distribution $\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)$ ont une dépendance en temps de la forme $\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\ldots)$, $\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\ldots)$ périodique en $\omega_1 t$, $\omega_2 t$, ... avec une période égale à 2π et dépendant faiblement de t, le principe variationnel (2) peut encore être appliqué en utilisant des variables test $\underline{\mathcal{U}}(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\ldots)$ de même structure et en complétant les intégrations $\int \ldots d_3x\,d_3p$ dans (2) par les intégrations $\int \ldots d_3x\,d_3p\,d(\omega_1 t/2\pi)\,d(\omega_2 t/2\pi)\ldots$. Ceci permet de déterminer $\left(\partial\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\ldots)/\partial t\right)$ quand $\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\ldots)$

est connu, c'est-à-dire en particulier lorsque le champ autocohérent $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$ présent dans le plasma est connu. Si $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont spécifiés par un potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)$ et un potentiel scalaire $\Psi(\vec{x},t)$ [$\vec{E} = -(1/c)\,\partial\vec{\mathcal{A}}/\partial t - \vec{\nabla}\Psi$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{A}}$] de la forme $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$, $\Psi(\vec{x}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$ nous avons $\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t) = (\vec{p} - (e_\alpha/c)\vec{\mathcal{A}})^2/2m_\alpha + e_\alpha\Psi = \mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\dots)$.

En général le champ autocohérent $\vec{\mathcal{A}}, \Psi$ peut être calculé à partir des équations de Maxwell et des conditions aux limites (composante normale de $\vec{\mathcal{A}}$ et valeur de Ψ sur une surface limitant le plasma, par exemple). Mais ceci peut de nouveau être obtenu par un principe variationnel. Nous introduisons un champ $\underline{\vec{\mathcal{A}}}(\vec{x}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$, $\underline{\Psi}(\vec{x}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$ proche du champ réel $\vec{\mathcal{A}}$, Ψ et l'Hamiltonien associé $\underline{\mathcal{H}}_\alpha(\vec{x},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\dots) = (\vec{p} - (e_\alpha/c)\underline{\vec{\mathcal{A}}})^2/2m_\alpha + e_\alpha\underline{\Psi}$. On peut vérifier qu'à chaque instant t, les fonctions $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$, $\Psi(\vec{x}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$ cohérentes avec une fonction de distribution donnée $\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\dots)$ sont obtenues en exprimant que la fonctionnelle :

$$\mathcal{N}(\underline{\vec{\mathcal{A}}},\underline{\Psi}) = \frac{1}{8\pi}\int\dots\left[\left\|\vec{\nabla}\underline{\Psi} + \frac{1}{c}\left(\omega_1\frac{\partial\underline{\vec{\mathcal{A}}}}{\partial\omega_1 t} + \omega_2\frac{\partial\underline{\vec{\mathcal{A}}}}{\partial\omega_2 t} + \dots\right)\right\|^2 - \left\|\vec{\nabla}\times\underline{\vec{\mathcal{A}}}\right\|^2\right] d_3x\, d_3p\, d\omega_1 t\, d\omega_2 t \dots$$

$$- \sum_\alpha \int\dots\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\dots)\,\underline{\mathcal{H}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t,\omega_1 t,\omega_2 t,\dots)\, d_3x\, d_3p\, d\omega_1 t\, d\omega_2 t \dots \qquad (10)$$

est extremum pour toutes variations de $\underline{\vec{\mathcal{A}}}$, $\underline{\Psi}$ au voisinage de $\vec{\mathcal{A}}$, Ψ conservant la valeur de Ψ et de la composante parallèle de $\vec{\mathcal{A}}$ à la frontière limitant le plasma. Considérant $\mathcal{N}(\underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi})$ donnée par (10) comme une fonction des fréquences ω_k et admettant que $\Psi = 0$ à la frontière du plasma, l'énergie totale du plasma et du champ électromagnétique à l'intérieur de la frontière entourant le plasma est donnée à l'instant t par :

$$\mathcal{E}_T = -\mathcal{N}(\vec{\mathcal{A}},\Psi) + \omega_k\frac{\partial\,\mathcal{N}(\vec{\mathcal{A}},\Psi)}{\partial\omega_k} \qquad (11)$$

A.II - PRINCIPE VARIATIONNEL SIMPLIFIE POUR UNE SITUATION OU LES TRAJECTOIRES SONT INTEGRABLES DANS UN CHAMP QUASISTATIQUE

L'utilisation des principes variationnels généraux exposés précédemment peut être très simplifiée dans deux cas extrêmes : les situations très collisionnelles, où chaque assemblée se comporte comme un fluide, avec une vitesse moyenne et une température définie en chaque point et au contraire les situations peu collisionnelles où les effets de trajectoires dans le champ autocohérent sont en principe prépondérants. Nous envisageons ici cette deuxième situation dans le cas où les trajectoires sont par ailleurs approximativement confinées dans un domaine de l'espace ; cette situation est réalisée expérimentalement dans les plasmas confinés magnétiquement à haute température.

1) Etat stationnaire

Le cas le plus simple est celui où le champ autocohérent est statique: $\mathcal{H}(\vec{x},\vec{p},t) = H(\vec{x},\vec{p})$ et où les trajectoires sont parfaitement confinées par ce champ. Les trajectoires sont alors en pratique intégrables, c'est-à-dire que les variables $\vec{x},\vec{p}$ le long d'une trajectoire sont des fonctions quasi périodiques du temps : [6]

$$\begin{aligned} x_r &= f_r(K_1, K_2, K_3, \omega_1 t+\alpha_1, \omega_2 t+\alpha_2, \omega_3 t+\alpha_3) \\ p_r &= g_r(K_1, K_2, K_3, \omega_1 t+\alpha_1, \omega_2 t+\alpha_2, \omega_3 t+\alpha_3) \end{aligned} \qquad (12)$$

où les fonctions $f_r(K_1,K_2,K_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ et $g_r(K_1,K_2,K_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ sont périodiques en $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ avec la période 2π ; $K_1,K_2,K_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ sont

des constantes d'intégration et $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont des fréquences angulaires fonctions de K_1, K_2, K_3 . Les trajectoires sont dessinées dans l'espace des phases sur les tores $\mathcal{T}$ obtenus en fixant K_1, K_2, K_3 et en variant $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de 2π . Les équations (12) impliquent l'existence, pour l'Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p})$ d'un système de variables angulaires et d'action $\phi_k(\vec{x}, \vec{p}, t)$, $J_k(\vec{x}, \vec{p}, t)$, k = [1,2,3] définies par les trois propriétés suivantes :[7][8]

a) Elles sont canoniquement conjuguées.

b) Les variables fondamentales x_r, p_r sont 2π-périodiques en ϕ_k lorsqu'on les exprime dans le systeme J_k, ϕ_k .

c) L'Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p})$ est une fonction des variables d'action J_k seulement: $H(\vec{x}, \vec{p}) = h(J_k)$

A l'aide de ces trois propriétés on dérive immédiatement les relations :

$$\frac{dJ_k}{dt} = -\frac{\partial h(J_k)}{\partial \phi_k} = 0 \quad ; \quad \phi_k = \frac{\partial h(J_k)}{\partial J_k} t + \alpha_k \tag{13}$$

qui expriment que les relations (12) sont bien restituées. Les J_k sont des constantes du mouvement, les ω_k ont pour valeur $\partial h / \partial J_k$, les variables d'action J_k paramètrent donc un tore $\mathcal{T}$ sur lequel une particule est repérée par les variables ϕ_k modulo 2π . D'autre propriétés des variables angulaires et d'actions sont données en Annexe I.

En l'absence de collisions et dans un champ statique, l'équation de Vlasov implique que la fonction de distribution à l'équilibre des particules d'une assemblée donnée est une fonction stationnaire des constantes du mouvement : $\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{p}) = f(J_k) = Cste$; comme les variables ϕ_k J_k sont canoniquement conjuguées, de telle manière que $D(\phi, J)/D(\vec{x}, \vec{p}) = 1$ et que l'espace complet $(\vec{x}, \vec{p})$ correspond au produit de l'espace J et d'une cellule cubique d'extension $(2\pi)^3$ de l'espace ϕ , la densité des particules dans l'espace J est $(2\pi)^3 f(J)$ où :

$$f(J) = (2\pi)^{-3} \int \mathcal{F}(J, \phi)\, d_3\, \phi \tag{14}$$

$\mathcal{F}(J, \phi)$ étant la fonction de distribution $\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{p})$ exprimée dans le système (J, ϕ) . La fonction $f(J)$ de chaque assemblée permet de calculer le champ autocohérent par le principe d'extremum (2) exprimé en utilisant les variables angulaires et d'action. Nous pouvons en fait calculer le champ $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$, $\Psi(\vec{x})$ dans l'ensemble des champs $\underline{\vec{\mathcal{A}}}(\vec{x})$, $\underline{\Psi}(\vec{x})$ pour lesquels il existe un système de variables angulaires et d'action $\underline{J}$, $\underline{\phi}$. L'Hamiltonien $\underline{\mathcal{H}}_\alpha(\vec{x}, \vec{p})$pour ces champs est alors égal à une fonction $\underline{h}_\alpha(\underline{J})$. On peut montrer (cf. Annexe I) qu'au premier ordre par rapport à la différence $\underline{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{\mathcal{A}}$, $\underline{\Psi} - \Psi$, nous avons :

$$\underline{J} = J + \sum_{m \neq (0,0,0)} K_m(J) \exp i m_k \phi_k$$

et donc que :

$$\underline{h}(\underline{J}) = \underline{h}(J) + \sum_{m \neq (0,0,0)} k_m(J) \exp i m_k \phi_k$$

Le second terme de la fonctionnelle $\mathcal{N}(\underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi})$ peut alors se mettre sous la forme :

$$\int\!\!\ldots \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{p}, t)\, \underline{\mathcal{H}}(\vec{x}, \vec{p}, t)\, d_3x\, d_3p = \int\!\!\ldots f(J)\, \underline{h}(J)\, d_3\phi\, d_3J$$

$$= (2\pi)^3 \iiint f(J)\, \underline{h}(J)\, d_3J$$

Compte tenu du fait que le champ $\vec{\mathcal{A}}$, Ψ ne dépend pas explicitement du temps, la fonctionnelle $\mathcal{N}(\underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi})$ s'écrit alors de façon plus simple :

$$\mathcal{N}(\underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi}) = \frac{1}{8\pi} \iiint \left\{ \| \vec{\nabla} \underline{\Psi} \|^2 - \| \vec{\nabla} \times \underline{\vec{\mathcal{A}}} \|^2 \right\} d_3x$$

$$- \sum_\alpha \iiint f_\alpha(J)\, \underline{h}_\alpha(J, \underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi})\, (2\pi)^3\, d_3J$$

2) Effet des collisions

Dans le cas considéré une évolution peut prendre place à cause des collisions. Si cet effet n'est pas trop important, les trajectoires des particules engendrent encore approximativement des tores $J = Cste$ et la fonction

de distribution des particules d'espèce α_0 , $\mathcal{F}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ est encore très voisine d'une fonction de J . Cette assemblée de particule sera alors convenablement décrite par sa fonction de distribution dans l'espace J , celle-ci sera toujours définie par l'égalité (14) et nous avons alors :

$$\mathcal{F}_{\alpha_0}(J,\phi) = f(J) + \delta\mathcal{F} \qquad (15)$$

$$\delta\mathcal{F} = \sum_{m\neq(0,0,0)} (\delta\mathcal{F})_m(J) \exp i m_k \phi_k \ll f(J)$$

$\delta\mathcal{F}$ est proportionnelle à la faible fréquence des collisions ν_c que nous avons introduites ici. De même que l'utilisation rationnelle du principe variationnel nous conduisait à choisir la forme (1) de $\mathcal{F}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ mettant en évidence son écart à l'équilibre thermodynamique $\mathcal{U}_{\alpha_0}/T$, de même ici nous choisirons de mettre $f(J)$ sous la forme :

$$f(J) = A \exp - \frac{h - U(J)}{T}$$

compte tenu que $\mathcal{H}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t) = h(J)$, c'est-à-dire que nous avons décomposé $\mathcal{U}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ sous la forme :

$$\mathcal{U}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t) = U(J) + \delta U \qquad (16)$$

où δU est proportionnel à ν_c comme $\delta\mathcal{F}$. A l'ordre 1 en ν_c : $\delta U = T\,\delta\mathcal{F}_{\alpha_0}/f$. Une variable $\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p})$ voisine de $\mathcal{U}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ sera alors écrite :

$$\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p}) = \underline{U}(J) + \underline{\delta U}(\vec{x},\vec{p})$$

avec $\underline{U}(J)$ et $\underline{\delta U}$ voisines de $U(J)$ et δU , $\underline{\delta U}$ étant proportionnelle à ν_c . Nous écrivons alors la fonctionnelle $\mathcal{M}(\underline{\mathcal{U}})$ donnée par (2) en remplaçant $\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0}$ par $\underline{U}(J)+\underline{\delta U}$, mais nous remarquons tout de suite que, du fait que $\mathcal{M}(\underline{\mathcal{U}})$ est extremum pour $\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0} = \mathcal{U}_{\alpha_0}$, à l'ordre 1 en ν_c nous pouvons remplacer $\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0}$ par $\underline{U}(J)$. Il vient alors, à l'ordre 1 en ν_c :

$$\dot{\mathcal{M}}(\underline{\mathcal{U}}) = \dot{\mathcal{M}}(\underline{U}) = \frac{2}{T}\int\cdots\frac{d\mathcal{F}_{\alpha_0}}{dt}\,\underline{U}(J)\,d_3J\,d_3\phi + \sum_{\alpha\neq\alpha_0}\frac{2}{T}\int\cdots\frac{d\mathcal{F}_{\alpha}(\vec{x},\vec{p},t)}{dt}\,\underline{\mathcal{U}}_{\alpha}(\vec{x},\vec{p},t)\,d_3x\,d_3p$$
$$+ \dot{S}\left(\underline{U}(J), \mathcal{U}_{\alpha\neq\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)\right)$$

Mais de l'égalité(15) et des lois du mouvement (13) on tire :

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\,\delta\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{m\neq(q,q,0)} C_m(J)\exp i m_k \phi_k$$

où les C_m sont proportionnels à $\delta\mathcal{F}$ et donc à ν_c , de sorte qu'il reste :

$$\dot{\mathcal{M}}(\underline{U}) = \frac{2}{T}\iint \frac{\partial f(J,t)}{\partial t}\,\underline{U}(J)(2\pi)^3 d_3J \;+\sum_{\alpha\neq\alpha_0}\frac{2}{T}\int\!\!\cdots\frac{d\mathcal{F}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)}{dt}\,\underline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t)\;d_3x\,d_3p$$

$$+\dot{S}\left(\underline{U}(J),\underline{\mathcal{U}}_{\alpha\neq\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)\right)$$

$$\dot{\mathcal{M}}(\underline{U})^{\star} = \frac{2}{T}\iint\frac{\partial f(J,t)}{\partial t}\,\underline{U}(J)(2\pi)^3 d_3J \;+\dot{S}\left(\underline{U}(J),\underline{\mathcal{U}}(\alpha\neq\alpha_0)\right) \qquad (17)$$

Il apparaît donc que nous pouvons calculer la variable $\frac{\partial f}{\partial t}$ à l'ordre 1 en ν_c en minimisant cette fontionnelle par rapport à $\underline{U}(J)$ au voisinage de $U(J)$ (et bien sûr pour toutes les variations de $\underline{\mathcal{U}}_{\alpha\neq\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ au voisinage de $\mathcal{U}_{\alpha\neq\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$).

Ce principe d'extremum détermine l'évolution dans le temps de la fonction $f(J,t)$, il est équivalent à l'équation :

$$\frac{\partial f(J,t)}{\partial t} = W_{000}(J,t) \qquad (18)$$

où la variable W_{000} est définie par :

$$\mathfrak{D}\left(U(J,t),\mathcal{U}_{\alpha\neq\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)\right) = W_{000}(J,t) + W'$$

$$= W_{000}(J,t) + \sum_{m\neq(q,q,0)} W_m(J,t)\exp i m_k\phi_k \qquad (19)$$

$\mathfrak{D}$ étant l'opérateur défini en (7). Si maintenant nous introduisons les coefficients de diffusion :

Note : * Dans la suite, et dans un souci d'allègement d'écriture nous omettrons souvent le second terme de $\dot{\mathcal{M}}(\underline{U})$ relatif aux autres assemblées. Ceci revient à considérer l'évolution temporelle d'une seule assemblée.

$$\langle \delta J_k \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial J_k}{\partial p_r} \right) \delta p_r \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial^2 J_k}{\partial p_r \partial p_s} \right) \frac{\delta p_r \delta p_s}{2} \right\rangle$$

$$\langle \delta J_k \delta J_\ell \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial J_k}{\partial p_r} \right) \left(\frac{\partial J_\ell}{\partial p_s} \right) \delta p_r \delta p_s \right\rangle$$

et leur composantes de Fourier :

$$\langle \delta J_k \rangle = D_k(J) + \sum_{n \neq (0,0,0)} D_{kn}(J) \exp i n_k \phi_k$$

$$\langle \delta J_k \delta J_\ell \rangle = D_{k\ell}(J) + \sum_{n \neq (0,0,0)} D_{k\ell n}(J) \exp i n_k \phi_k$$

On constate utilisant (19) que, quelque soit la variable $\delta U(J)$:

$$\iiint W_{000}(J)\, \delta U(J)\, (2\pi)^3 d_3 J = \int \cdots \mathfrak{D}(U(J))\, \delta U(J)\, d_3 x\, d_3 p$$

$$= \int \cdots \left(- \frac{\partial}{\partial p_r} \left(\langle \delta p_r \rangle f(J) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_r \partial p_s} \left(\langle \delta p_r \delta p_s \rangle f(J) \right) \right) \delta U(J)\, d_3 x\, d_3 p$$

$$= \int \cdots \left[\langle \delta p_r \rangle f(J) \frac{\partial \delta U(J)}{\partial p_r} + \frac{1}{2} \langle \delta p_r \delta p_s \rangle f(J) \frac{\partial^2 \delta U(J)}{\partial p_r \partial p_s} \right] d_3 x\, d_3 p$$

$$= \int \cdots \left[\langle \delta J_k \rangle f(J) \frac{\partial \delta U(J)}{\partial J_k} + \frac{1}{2} \langle \delta J_k \delta J_\ell \rangle f(J) \frac{\partial^2 \delta U(J)}{\partial J_k \partial J_\ell} \right] d_3 J\, d_3 \phi$$

$$= \iiint \left[D_k(J) f(J) \frac{\partial \delta U(J)}{\partial J_k} + \frac{1}{2} D_{k\ell} f(J) \frac{\partial^2 \delta U(J)}{\partial J_k \partial J_\ell} \right] (2\pi)^3 d_3 J$$

$$= \iiint \left[- \frac{\partial}{\partial J_k} \left(D_k f(J) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial J_k \partial J_\ell} \left(D_{k\ell} f(J) \right) \right] \delta U(J)\, (2\pi)^3 d_3 J$$

De sorte que :

$$W_{000}(J,t) = - \frac{\partial}{\partial J_k} \left(D_k f(J) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial J_k \partial J_\ell} \left(D_{k\ell} f(J) \right)$$

et (18) apparaît comme l'équation de Fokker Planck dans l'espace J .

3) Effet d'une dépendance temporelle de l'Hamiltonien

Une autre cause d'évolution de la fonction de distribution des particules d'une assemblée α_0 peut apparaître lors de l'évolution temporelle de l'Hamiltonien décrivant le mouvement de celles-ci. Considérons donc une assemblée admettant un Hamiltonien $\mathcal{H}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ dépendant lentement du temps. Nous pouvons avoir encore une situation simple si "à chaque instant" il existe encore des variables angulaires et d'actions $J_k = J_k(\vec{x},\vec{p},t)$, $\Phi_k = \Phi_k(\vec{x},\vec{p},t)$, c'est-à-dire si de telles variables existent pour l'Hamiltonien gelé à l'instant t $\mathcal{H}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t) = h(J,t)$. "A chaque instant" les trajectoires des particules sont intégrables et elles engendrent encore approximativement des tores $\mathcal{C}_t$ dans l'espace des phases. La fonction de distribution des particules $\mathcal{F}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ est alors très voisine d'une fonction de J et t , et peut être écrite sous la forme (15) ; l'écart de $\mathcal{F}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ à une fonction $f(J,t)$ étant, comme précédemment, représenté par $\delta\mathcal{F}$ proportionnel ici à $\partial\mathcal{H}/\partial t$. Ecrivant encore :

$$f(J,t) = A \exp - \frac{h(J,t) - U(J,t)}{T}$$

et posant $\mathcal{U}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t) = U(J) + \delta U$, la variable $\delta U = T\,\delta\mathcal{F}/f$ est aussi proportionnelle à la petite quantité $\partial\mathcal{H}/\partial t$. Du fait que $\mathcal{H}(\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0})$ est extremum pour $\underline{\mathcal{U}} = \underline{U}$, nous pouvons l'écrire, à l'ordre 1 en $\partial\mathcal{H}/\partial t$:

$$\mathcal{H}(\underline{\mathcal{U}}) = \iiint \frac{d\mathcal{F}_{\alpha_0}}{dt}\,\underline{U}(J)\,(2\pi)^3 d_3 J + \dot{S}(\underline{U})$$

Nous montrerons dans l'annexe I, que les variables $J_k(\vec{x},\vec{p},t)$ vérifient :

$$\frac{\partial J_k}{\partial t} = \frac{dJ_k}{dt} = \sum_{m\neq(0,0,0)} K_m(J,t)\,\exp i m_k \Phi_k$$

où les K_m sont évidemment proportionnels à $\partial\mathcal{H}/\partial t$. Il résulte que

$$\frac{d\mathcal{F}_{\alpha_0}}{dt} = \frac{d(f+\delta\mathcal{F})}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{m\neq(0,0,0)} k_m(J,t)\,\exp i m_k \Phi_k$$

On a donc encore, au premier ordre en $\partial\mathcal{H}/\partial t$:

$$\dot{\mathcal{H}}(\underline{U}) = \dot{\mathcal{H}}(\underline{U}) = \iiint \frac{\partial f}{\partial t}\, \underline{U}(J)\,(2\pi)^3 d_3 J \;+\; \dot{S}(\underline{U}) \qquad (20)$$

Finalement nous pouvons déterminer à chaque instant la variable $\partial f/\partial t$, commettant seulement une erreur d'ordre deux en ν_c et $\partial \mathcal{H}/\partial t$, en rendant l'expression (20) de $\mathcal{H}(\underline{U})$ extremum pour $\underline{U} = \underline{U}$.

Plus précisément, il est démontré dans l'Annexe II que le principe précédent n'est valable que si l'on peut négliger la quantité $\mathcal{Z}$ ci-dessous devant $\dot{S}(\underline{U})$:

$$\mathcal{Z} = \left| \sum_{m \neq (0,0,0)} \iiint |W_m|^2 \frac{2}{F} \mathcal{O}\left(1/m_R \frac{\partial h}{\partial J_R}\right) (2\pi)^3 d_3 J \right|$$

$$+ \frac{2}{T} \left| \sum_{m \neq (0,0,0)} \iiint \left| \dot{\mathcal{H}}_m / m_R \frac{\partial h}{\partial J_R} \right|^2 \left(m_R \frac{\partial U}{\partial J_R}\right) \left(m_R \frac{\partial f}{\partial J_R}\right) \mathcal{O}\left(1/m_R \frac{\partial h}{\partial J_R}\right) (2\pi)^3 d_3 J \right| \qquad (21)$$

où les variables $W_m(J)$ sont données par (19) et les variables $\dot{\mathcal{H}}_m(J,t)$ sont définies par :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_m \dot{\mathcal{H}}_m(J,t) \exp i m_R \phi_R$$

et les quantités $\mathcal{O}(1/m_R(\partial h/\partial J_R))$ sont de l'ordre $(m_R \partial h/\partial J_R)^{-1}$ prises dans la masse de l'assemblée. Nous supposerons cette condition satisfaite dans la suite.

L'évolution de la fonction de distribution des particules peut encore être due au fait que l'Hamiltonien $\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, t)$ est voisin d'un Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p}, t)$ dépendant lentement du temps (et pour lequel les trajectoires des particules sont intégrables) mais en diffère par une perturbation $\delta H(\vec{x}, \vec{p}, t)$ ou une suite de perturbations, qui en général compliquent considérablement le mouvement, c'est ce que nous allons maintenant étudier.

A.III - PRINCIPE VARIATIONNEL SIMPLIFIE EN PRESENCE D'UNE PERTURBATION RESONANTE

Un cas très important en pratique est celui où l'Hamiltonien d'une assemblée $\alpha = \alpha_0$ peut être décomposée sous la forme :

$$\mathcal{H}_{\alpha_0}(\vec{x}, \vec{p}, t) = H(\vec{x}, \vec{p}, t) + \delta H(\vec{x}, \vec{p}, t) \tag{22}$$

expression dans laquelle $H(\vec{x}, \vec{p}, t)$ dépend lentement du temps et engendre à chaque instant des trajectoires intégrables sur des tores $\mathcal{T}_t$ dans l'espace des phases. Il lui est associé par conséquent un système de variables angulaires et d'action $J_R(\vec{x}, \vec{p}, t)$, $\phi_R(\vec{x}, \vec{p}, t)$ tel que $H(\vec{x}, \vec{p}, t) = h(J, t)$. Comme nous venons de le dire, la perturbation δH , en particulier si elle est résonante, complique le mouvement des particules. Elle peut ainsi accélérer l'évolution de chaque assemblée dans l'espace des phases. Cette évolution est l'objet principal de cette étude, et nous allons l'examiner pour plusieurs types de perturbations.

1) Evolution due à une perturbation d'amplitude stationnaire

Nous commencerons notre étude par le cas le plus simple où la perturbation $\delta H(\vec{x}, \vec{p}, t)$ dans (22) peut être mise, dans le système (J, ϕ) sous la forme suivante :

$$\delta H = \Delta(J) \cos(m_R^* \phi_R + \omega t + \varphi_0) + \sigma(J) \tag{23}$$

où $m^* = (m_1^*, m_2^*, m_3^*)$ est un triplet d'entiers fixés et la fonction réelle $\Delta(J)$ est régulière en J , avec des échelles de variations supérieures à ΔJ_R dans chaque direction J_R , ΔJ_R représentant une extension caractéristique

dans la direction J_k du domaine de l'espace J occupé par l'assemblée. Compte tenu des lois du mouvement (13), une telle perturbation est "résonante" avec le mouvement d'une particule si celle-ci se trouve sur la surface de l'espace des phases définie par :

$$\Omega(J,t) \equiv m_k^* \frac{\partial h(J,t)}{\partial J_k} + \omega = 0$$

Cette surface de résonance est aussi une surface dans l'espace J (Fig. 1).

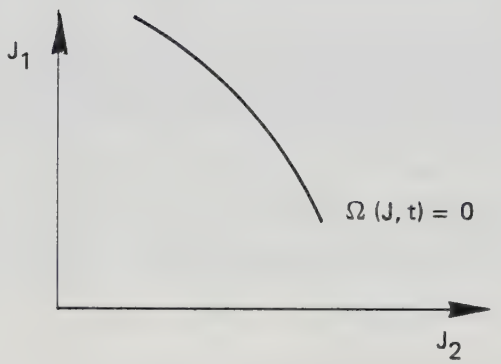


FIG 1 : Projection de la surface de résonance sur les directions J_1, J_2

La perturbation δH induit, dans un "domaine piégé" au voisinage de la surface de résonance, un changement de topologie des trajectoires. En particulier dans ce domaine, la phase de la perturbation $\varphi = (m_k^* \phi_k + \omega t + \varphi_0)$ influençant le mouvement de la particule le long d'une trajectoire ne passe pas ergodiquement par toutes les valeurs possibles mais reste comprise à l'intérieur d'un intervalle inférieur à 2π (la longueur de cet intervalle s'annule au centre du domaine piégé). L'extension du domaine piégé où la nouvelle topologie apparaît, c'est-à-dire sa projection dans l'espace J (le long des directions ϕ_k) est donnée par (cf. Annexe I) :

$$|\Omega(J,t)| \lesssim 2\,|\alpha s|^{1/2} = 2\,\Delta\Omega_T \qquad (24)$$

$$\alpha = m_k^* \frac{\partial \Omega}{\partial J_k} = m_k^* m_\ell^* \frac{\partial^2 h}{\partial J_k \partial J_\ell}$$

$\Delta\Omega_x$ est la demi largeur, comptée en Ω , du domaine piégé.

La perturbation δH entraîne pour la fonction de distribution $\mathcal{F}(\vec{x},\vec{p},t)$ une nouvelle dépendance en ϕ_k et une singularité au voisinage de la surface de résonance $\Omega(J,t)=0$. La variable $\mathcal{F}$ reste cependant, au moins loin de la surface de résonance, proche d'une fonction $\mathcal{F}(J,t)$ des variables J puisque δH est faible. Nous pourrions de nouveau définir une fonction $\mathcal{F}(J,t)=(2\pi)^{-3}\int..\mathcal{F}\ d_3\phi$ qui, loin de la surface de résonance, serait une bonne approximation de $\mathcal{F}(J,\phi,t)$, représentant exactement la densité de particules dans l'espace J . Mais cette densité serait singulière sur la surface de résonance. Il est plus avantageux d'introduire une forme simplifiée $f(J,t)$ de $\mathcal{F}(J,\phi,t)$, c'est-à-dire une variable $f(J,t)$ régulière en J , possédant des échelles caractéristiques de variation ΔJ_k dans la direction J_k et dépendant faiblement de t. Cette fonction $f(J,t)$ peut être spécifiée par la contrainte suivante, valable pour toutes variables $\mathcal{V}(J)$ régulière en J :

$$\int..\mathcal{F}(J,\phi,t)\,\mathcal{V}(J)\,d_3J\,d_3\phi=(2\pi)^3\iiint f(J,t)\,\mathcal{V}(J)\,d_3J \qquad (25)$$

Rappelons que le domaine $\Delta J_1\times\Delta J_2\times\Delta J_3$ de l'espace J est typiquement le domaine occupé par l'assemblée (mais peut être plus restreint) ; nous supposerons toutefois qu'il est beaucoup plus grand que le domaine piégé induit par la perturbation δH . La fonction $f(J,t)$ apparaît ainsi comme une moyenne à échelle grande devant l'épaisseur de la discontinuité autour de la surface de résonance. Cependant elle contient généralement les informations utiles sur l'assemblée de particules considérées. En particulier, sous les conditions données ci-dessous, sa connaissance permet de calculer à chaque instant le champ autocohérent responsable de l'Hamiltonien $H(\vec{x},\vec{p},t)$, au premier ordre en δH , à l'aide du principe (10).

Sous certaines conditions, nous montrons dans l'Annexe II que la fonction de distribution régularisée $f(J,t)$, satisfaisant à la contrainte (25) peut être suivie dans le temps en appliquant le principe variationnel autonome, analogue aux principes (17) (20). Plus précisément, posant :

$$f(J,t)=A\exp-\frac{h-U}{T} \qquad (26)$$

la variable $\partial f/\partial t$ est déterminée par le principe $\mathcal{M}(\underline{U})$ extremum pour $\underline{U} = \underline{U}$ où :

$$\mathcal{M}(\underline{U}) = \frac{2}{T}\iiint \frac{\partial f(J,t)}{\partial t}\,\underline{U}(J)(2\pi)^3 d_3 J + \dot{S}(\underline{U}) + \delta\mathcal{M}(\underline{U}) \qquad (27)$$

où $\delta\mathcal{M}(\underline{U})$ est une fonctionnelle de la variable régulière $\underline{U}$ dont nous donnons les expressions plus loin. La production d'entropie est alors donnée par $\dot{S}(\underline{U}) + \delta\mathcal{M}(\underline{U})$.

Nous supposons d'abord bien entendu que $\delta\mathcal{M} \gg \mathcal{Z}$ dont l'expression a été donnée précédemment (21) de manière que les effets de la perturbation δH soient dominants ; une autre condition essentielle pour que l'évolution de la variable f soit effectivement donnée par un principe du type (27) est que, tout au long de la trajectoire d'une particule, la phase $\varphi = (m_k^* \phi_k + \omega t + \varphi_0)$ passe par toutes les valeurs possibles de manière ergodique du fait du mouvement de la particule, avant que celle-ci diffuse d'une valeur significative sous l'effet direct des collisions dans l'espace J ou dans la direction ϕ. On peut considérer que cette condition signifie que les effets de trajectoires jouent un rôle prépondérant dans le mécanisme de l'interaction de la particule avec la perturbation.

Loin du domaine résonant l'ergodisation de la phase φ est réalisée au bout du temps Ω_p^{-1}, où Ω_p est la valeur moyenne de Ω prise dans la masse de l'assemblée, c'est-à-dire sur le domaine d'extension $\Delta J_1 \times \Delta J_2 \times \Delta J_3$ Nous supposons donc que :

$$\Omega_p \gg \tau_c^{-1} \qquad (28)$$

où τ_c est le temps nécessaire pour que la particule diffuse dans le domaine $\Delta J_1 \times \Delta J_2 \times \Delta J_3$ ou pour que la phase φ ait varié d'une quantité de l'ordre de 1 sous l'effet direct des collisions :

$$\tau_c^{-1} = \mathrm{Sup}\left(\frac{<\delta J_k\, \delta J_\ell>}{\Delta J_k\, \Delta J_\ell}\,,\, <\delta (m_k^* \phi_k)^2>\right) \qquad (29)$$

que nous pouvons écrire aussi :

$$\tau_c^{-1} = Sup\left(\frac{<\delta J_k \delta J_\ell>}{\Delta J_k \Delta J_\ell} , \frac{<\delta (\delta H)^2>}{\delta H^2} \right)$$

Au voisinage de la surface de résonance $\Omega = d\varphi/dt = 0$, l'ergodisation ne peut pas en principe être seulement due au mouvement de la particule. Elle requiert une diffusion de la particule transverse à la surface de résonance : elle s'effectue en un temps de l'ordre de $Sup(\tau_1, \tau_2)$ où τ_1 est le temps nécessaire à la particule pour s'échapper du domaine piégé et τ_2 est la durée nécessaire pour que la variation de φ, due à la diffusion de Ω soit de l'ordre de 1. Le temps τ_1 est obtenu en écrivant que la diffusion de Ω pendant τ_1 est égale à l'extension du domaine piégé :

$$\tau_1 \times <\delta\Omega^2> = (2\Delta\Omega_z)^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_1^{-1} = \frac{<\delta\Omega^2>}{4\alpha^2}$$

où $<\delta\Omega^2> = <(\partial\Omega/\partial J_k)(\partial\Omega/\partial J_\ell)\,\delta J_k \delta J_\ell>$
est le coefficient de diffusion de la variable Ω. Le temps τ_2 est obtenu en écrivant que pendant ce temps Ω a diffusé de $\delta\Omega = (<\delta\Omega^2> \times \tau_2)^{1/2}$ ce qui a entraîné une diffusion $<\delta\varphi^2> = <\delta\Omega^2>\tau_2^3$. Il vient alors :

$$<\delta\varphi^2> = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_2^{-1} = (<\delta\Omega^2>)^{1/3}$$

Pour que l'ergodisation de la phase φ prenne place en un temps très inférieur à τ_c, nous devons avoir :

$$\tau_1^{-1} \gg \tau_c^{-1} \qquad (30)$$

$$\tau_2^{-1} \gg \tau_c^{-1} \qquad (31)$$

On notera que ces conditions impliquent que le coefficient de diffusion $<\delta\Omega^2>$ (représentant une diffusion de la particule transversalement à la surface de résonance) est suffisamment grand. Elles sont toujours vérifiées (compte tenu que $\tau_1^{-1} \sim \nu_c/(\Delta\Omega_z)^2$, $\tau_2^{-1} \sim \nu_c^{1/3}$ et $\tau_c^{-1} \sim \nu_c$) si le taux de collision ν_c tend vers 0. D'autre part nous avons $\tau_c^{-1} \gtrsim <\delta\Omega^2>/\Omega_p^2$ de telle sorte que, si (30) et (31) sont satisfaites partout dans l'assemblée

elles impliquent :

$$\frac{<\delta\Omega^2>}{\Omega_p^2} \lesssim \tau_c^{-1} \ll \Omega_p$$

c'est-à-dire la condition (28) que nous avons supposée vérifiée dans tout l'espace utile J . Enfin, nous admettrons aussi que les variations de l'Hamiltonien $h(J,t)$ sont suffisamment lente, c'est-à-dire :

$$\partial h(J,t) / h(J,t) \partial t \ll Sup\ (\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1})$$

et que le coefficient de diffusion $<\delta\Omega^2>$ est à peu près constant sur les trajectoires :

$$<\delta\Omega^2> = \sum_m \Delta_m(J) \exp i m_R \phi_R \ \# \ \Delta_{000}(J) \qquad (32)$$

Sous les conditions (30), (31) et (32) les calculs de l'Annexe II amènent à scinder la fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{H}}(\underline{U})$ figurant dans le principe variationnel (27) en plusieurs termes :

$$\delta\dot{\mathcal{H}}(\underline{U}) = \delta\dot{\mathcal{H}}_R(\underline{U}) + \delta\dot{\mathcal{H}}_b(\underline{U}) \qquad (33)$$

Le terme $\delta\dot{\mathcal{H}}_R(\underline{U})$, généralement prépondérant, représente la production d'entropie due à la résonance des particules au voisinage de la surface de résonance $\Omega = 0$; il est calculé sous la forme :

$$\delta\dot{\mathcal{H}}_R(\underline{U}) = \frac{1}{T^2} \iiint \left(\omega + m_R'' \frac{\partial U}{\partial J_R}\right)^2 \mathcal{I}(\Delta,J)\, \delta(\Omega)\, f(J,t)(2\pi)^3\, d_3 J \qquad (34)$$

où $\delta(\Omega)$ est la distribution de Dirac. On est amené à définir deux régimes possibles permettant de calculer la valeur de $\mathcal{I}(\Delta,J)$ en chaque point de la surface de résonance :

a) $(<\delta\Omega^2>)^{1/3} \gg \Delta\Omega_I = |\alpha\Delta|^{1/2}$. Dans ce cas le piégeage des particules n'est pas effectif. La fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{H}}_R(\underline{U})$ est alors de type quasilinéaire ou de Landau-[9][10] c'est-à-dire :

$$<\delta\Omega^2>^{1/3} \gg \Delta\Omega_I$$

$$\mathcal{I}(\Delta,J) = \frac{\pi}{2} \Delta^2(J) \qquad (35)$$

b) $(\langle \delta\Omega^2 \rangle)^{1/3} \ll \Delta\Omega_I$. On retrouve la formulation de Zakharov et Karpman [11] reflétant l'équilibre collisionnel de l'assemblée dans le domaine piégé au voisinage de la surface de résonance :

$$\langle \delta\Omega^2 \rangle^{1/3} \ll \Delta\Omega_I$$

$$I(\Delta, J) = 1{,}38 \, \frac{|\Delta(J)|^{1/2}}{\alpha^{3/2}} \langle \delta\Omega^2 \rangle \qquad (36)$$

où α est donné par (24).

Si δH est de la forme :

$$\delta H = \Delta(J) \, f(m_k^* \phi_k + \omega t + \varphi_0)$$

où la fonction $f(\varphi)$ est 2π-périodique et a une amplitude inférieure ou égale à 1, le coefficient 1,38 dans l'expression (36) est remplacé par :

$$\theta = 2\sqrt{2}\,\pi \lim_{w \to \infty} \left(\frac{w}{K(w)} - \int_1^\infty \frac{dw}{2K(w)} \right)$$

où $K(w) = \int_{-\pi}^{+\pi} (w - f(\varphi))^{1/2} \, d\varphi$.

Le terme $\delta \dot{d}b_b$ représente la production d'entropie due à l'effet simultané des collisions et de la perturbation au sein de l'assemblée. Il est prépondérant dans le cas où il n'existe pas de surface de résonance bien sûr mais aussi pour des variations $d\underline{U} = \underline{U} - \underline{U}$ de la variable test $\underline{U}$ telles que $m_k^* \, \partial \underline{U} / \partial J_k = 0$ sur la surface de résonance, auquel cas la variation $d(\delta \dot{d}b_R)$ de $\delta \dot{d}b_R$ est nulle. Le terme $\delta \dot{d}b_b$ est de la forme :

$$\delta \dot{d}b_b(\underline{U}) = \dot{S}\left(\underline{U} + (m_k^* \frac{\partial \underline{U}}{\partial J_k} + \omega)\frac{\delta H}{\Omega} - \frac{\Delta^2}{4T} + \sigma, \underline{U}_{(\alpha \neq \alpha_0)}\right) - \dot{S}\left(\underline{U}, \underline{U}_{(\alpha \neq \alpha_0)}\right) \qquad (37)$$

où les intégrales en $\vec{p}$, $\vec{p}'$ dans l'expression de $\dot{S}$ sont à prendre dans le domaine $|\Omega(J, t)| > r \to 0$ et les termes divergents proportionnels à r^{-3} , r^{-1} sont négligés. Cette quantité représente une production d'entropie en dehors de la surface de résonance. La fonctionnelle $\delta \dot{d}b_b$ peut cependant

contenir un terme résonant dans le régime a) de Landau (35) , et dans ce cas l'expression (37) doit être complétée par :

$$-\frac{2}{T}\,\mathcal{R}e\left\{\int\!\!\dots\mathfrak{D}\left(d\underline{U}+m_k^*\frac{\partial d\underline{U}}{\partial J_k}\cdot\frac{\delta H}{\Omega},d\underline{U}(\omega\neq\omega_0)\right)\Delta\exp i(m_k^*\phi_k+\omega t+\varphi_0)\right.$$

$$\left.\left(m_k^*\frac{\partial U}{\partial J_k}+\omega\right)i\pi\,\delta(\Omega)\,d_3x\,d_3p\right\}$$

2) Evolution due à une perturbation dont l'amplitude est fonction du temps

Nous pouvons aussi considérer le cas où l'amplitude Δ de la perturbation (23) dépend lentement du temps : $\Delta=\Delta(J,t)$. Un effet de résonance peut encore être attendu si

$$\gamma=\frac{\partial\Delta(J,t)}{\Delta\,\partial t}\ll\Omega_p$$

en supposant bien sûr, pour que la variation de l'amplitude $\Delta(J,t)$ joue un rôle effectif, que le taux de variation γ est grand par rapport à τ_c^{-1} :

$$\gamma\gg\mathrm{Sup}\,(\tau_i^{-1},\tau_i^{-1})$$

On montre alors que l'évolution de la variable $f(J,t)$, toujours définie par la relation (26) peut être calculée par le principe d'extremum (27), où la fonctionnelle $\delta\mathcal{U}(\underline{U})$ est maintenant déterminée par la variation dans le temps de Δ . Nous avons :

$$\delta\mathcal{U}=\delta\mathcal{U}_{\gamma R}+\delta\mathcal{U}_{\gamma b}$$

où le terme $\delta\mathcal{U}_{\gamma b}$ apparaît dans la masse du plasma :

$$\delta\mathcal{U}_{\gamma b}(\underline{U})=\frac{1}{T}\iiint\left(m_k^*\frac{\partial f}{\partial J_k}\right)\left(m_k^*\frac{\partial\underline{U}}{\partial J_k}\right)\frac{\Delta(\partial\Delta/\partial t)}{\Omega^2}f(J,t)(2\pi)^3d_3J \qquad (38)$$

l'intégrale étant prise dans le domaine $|\Omega| > \Gamma$, et les termes divergents proportionnels à Γ^{-1} étant négligés. En ce qui concerne le terme $\delta\dot{\mathcal{U}}_{\gamma R}$ représentant l'effet résonant, deux situations peuvent se présenter :

a) $\gamma \gg \Delta\Omega_I$: la fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{U}}_{\gamma R}(\underline{U})$ est de type quasilinéaire avec $I(s,J,t)$ de la forme (35).

b) $\gamma \ll \Delta\Omega_I$: l'évolution d'une particule au voisinage de la surface de résonance est adiabatique à l'intérieur et à l'extérieur du domaine piégé, ce qui introduit une discontinuité de $\mathcal{F}_R$ à la séparatrice de ce domaine (Figure 2). Nous avons alors :

$$I(s,J,t) = 0{,}85\gamma \frac{|s(J,t)|^{3/2}}{\alpha^{1/2}} \qquad (39)$$

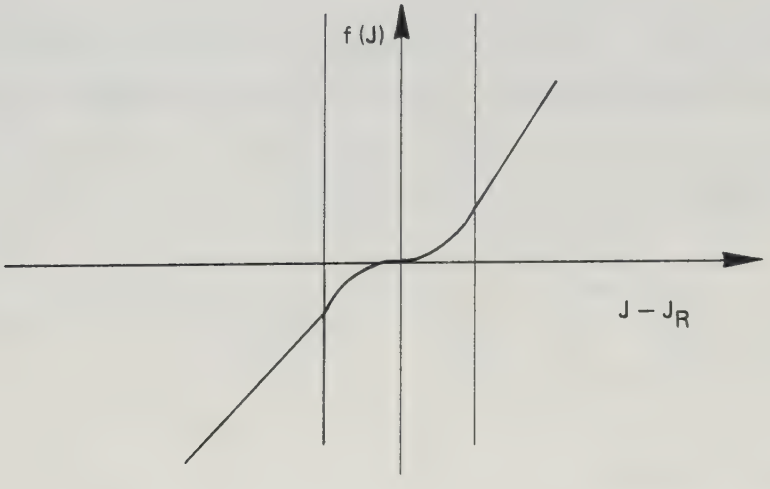


FIG 2 : Allure de la fonction f (J) au voisinage de la surface de résonance dans le cas d'une évolution adiabatique

3) Généralisations immédiates

Comme nous le verrons plus en détail ci-après, si la perturbation δH

est une somme de termes de la forme (23), la fonctionnelle $\delta \dot{\mathcal{U}}(\underline{U})$ est la somme des termes (34) (35) ou (34) (36) donnés par chaque perturbation élémentaire à condition que dans le régime de Zakharov et Karpman l'extension du domaine piégé au voisinage de chaque surface de résonance soit faible comparée à la distance entre ces surfaces.

Un cas intéressant est celui où les perturbations δH vérifiant les conditions (28) (30) (31) produisent un grand nombre de surfaces de résonance parallèles dans le domaine d'extension $\Delta J_1 \times \Delta J_2 \times \Delta J_3$. Supposant voisins les triplets m^* et les fréquences ω des perturbations δH successives, nous pouvons définir en un point J donné une densité ν de perturbations résonantes, telle que $\nu \, d\Omega$ soit le nombre de perturbations pour lesquelles la quantité $\Omega = \omega + m_R^* (\partial h / \partial J_R)$ se trouve dans l'intervalle $[0, d\Omega]$. En exprimant que la fonctionnelle

$$\dot{\mathcal{U}}(\underline{U}) = \frac{2}{T} \iiint \frac{\partial f}{\partial t} \, \underline{U} \, d_3 J \, (2\pi)^3 + \dot{S}(\underline{U}) + \delta \dot{\mathcal{U}}_R(\underline{U})$$

est extremum pour $\underline{U} = U$, nous pouvons alors écrire l'équation d'évolution de la fonction de distribution $f(J,t)$ sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{Pert.}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{Part} = \frac{1}{\Delta\Omega} \int_0^{\Delta\Omega} \sum_{Pert} m_\ell^* \frac{\partial}{\partial J_\ell} \left(\frac{1}{T} \left(\omega + m_k^* \frac{\partial U}{\partial J_k} \right) \right) I(A, J, t) \, f(J,t) \, \delta(\Omega) \, d\Omega$$

où $(\partial f / \partial t)_{Coll}$ est le taux de variation de $f(J,t)$ correspondant à la production d'entropie $\dot{S}(\underline{U})$, c'est-à-dire (cf. § II.2) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{Coll} = W_{000}(J) = -\frac{\partial}{\partial J_k} (D_k f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial J_k \partial J_\ell} (D_{k\ell} f)$$

et dans l'expression de $(\partial f / \partial t)_{Pert}$ le taux de variation de $f(J,t)$ dû aux perturbations, la somme $\sum_{Pert}$ englobe les perturbations δH telles

que $0 < \Omega(J,t) < \Delta\Omega$. Supposant que les perturbations δH successives ont une valeur de leur amplitude Δ analogue, et tenant compte du fait que au voisinage de $\Omega = 0$:

$$\omega + m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R} = m_R^* \left(-\frac{\partial h}{\partial J_R} + \frac{\partial U}{\partial J_R} \right) = m_R^* \frac{\partial f}{f \partial J_R} . T$$

nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{Part} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial J_R} \left(D_{Rl}^* \frac{\partial f}{\partial J_l} \right)$$

où les coefficients de diffusion D_{Rl}^* induits par les perturbations sont donnés par :

$$D_{Rl}^* = 2 m_R^* m_l^* \gamma(J) I(\Delta, J) \qquad (40)$$

Lorsque plusieurs assemblées sont prises en compte, chacune d'entre elles sera décrite par une fonction de distribution régularisée $f_\alpha(J,t)$ et dans l'expression de la fonctionnelle $\dot{\mathcal{H}}(\underline{U})$ intervenant dans le principe variationnel (27) il faudra ajouter les différentes contributions $\delta \dot{\mathcal{H}}_\alpha(\underline{U})$ calculées comme précédemment avec chacune des assemblées.

Il y a donc lieu maintenant d'examiner la possibilité d'obtenir un principe variationnel permettant de suivre l'évolution de la fonction de distribution lorsque l'assemblée est soumise à une somme de perturbations interagissant les unes sur les autres.

A.IV - GENERALISATION DU PRINCIPE VARIATIONNEL SIMPLIFIE EN PRESENCE D'UNE SOMME DE PERTURBATIONS RESONANTES

Il est très important d'examiner des situations moins simples mais plus réalistes où la perturbation δH à l'Hamiltonien principal $H(J,t)$ responsable de l'évolution de la fonction de distribution de l'assemblée de particules ne peut plus s'exprimer sous la forme simple qui nous a servi d'expression de départ (22) dans l'étude précédente. Nous examinons donc la possibilité de modifier le principe variationnel simplifié obtenu précédemment (27) pour prendre en compte les effets d'une perturbation plus compliquée afin de conserver cette méthode variationnelle d'étude de l'évolution et de l'équilibre de l'assemblée considérée.

Nous avons déjà abordé dans le paragraphe III.3 un cas très simple de généralisation que nous pouvons formuler sous la forme plus générale suivante : si la perturbation δH est de la forme :

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_m \delta H_m \\ \delta H_m &= \delta H_{m,\omega}(J) \exp i(m_k^* \phi_k + \omega t) + c.c. \\ \delta H_m &= \Delta(J) \cos(m_k^* \phi_k + \omega t) \\ |\Delta(J)| &= \frac{|\delta H_{m,\omega}(J)|}{2} \end{aligned} \tag{41}$$

où toutes les perturbations élémentaires définissent des surfaces de résonances parallèles, le principe variationnel simplifié précédent s'applique, chaque perturbation ajoutant sa contribution $\delta \mathcal{H}$ que nous avons calculé précédemment (cf. equations (34) (37)).

- Si chaque perturbation élémentaire vérifie la condition d'existence de régime Landau, son action sur la fonction de distribution peut être linéarisée. Ceci justifie l'utilisation du principe variationnel précédent en superposant les $\delta \dot{d}$ induits par chaque perturbation élémentaire.

- Lorsque des perturbations élémentaires vérifient la condition d'existence du régime Zakharov et Karpman, leur action est essentiellement non linéaire. Cette action n'est cependant non linéaire qu'à l'intérieur et au voisinage du domaine piégé où se créé un nouvel équilibre de l'assemblée des particules, profondément influencé par la nouvelle topologie des trajectoires due à la perturbation. Il est alors évident que si les surfaces de résonance sont suffisamment éloignées et les domaines piégés ont une extension suffisamment faible pour que ces derniers soient nettement séparés dans l'espace des phases, nous pouvons superposer les $\delta \dot{d}$ induits par chaque perturbation élémentaire.

Il reste donc à examiner le cas de perturbations, dans le régime Zakharov et Karpman, dont les surfaces de resonance sont parallèles mais voisines de sorte qu'il y ait recouvrement des domaines piégés dus à chacune d'elles. Une première situation très importante de ce type est celle ou deux perturbations sont présentes, la première créant un domaine piégé large, à l'intérieur duquel la seconde exerce des effets résonants. Une autre situation fondamentale est la situation "stochastique" où de très nombreuses perturbations sont présentes et produisent des domaines piégés empiétant les uns sur les autres.

1) Evolution due à la présence d'une perturbation δH en régime Zakharov et Karpman créant un domaine piégé et d'une petite perturbation $\delta H'$ résonante dans ce domaine

Nous nous intéressons donc à une assemblée dont l'Hamiltonien peut être décomposé sous la forme :

$$\mathcal{H} = h(J,t) + \delta H + \delta H'$$

$$\delta H = s(J,t) \cos (n_R^* \phi_R + \omega t)$$

$$\delta H' = s'(J,t) \cos (n_R'^* \phi_R + \omega' t)$$

l'Hamiltonien $h(J,t) + \delta H$ satisfait à toutes les conditions exposées dans le paragraphe III pour appliquer le principe variationnel simplifié dans le cas Zakharov et Karpman, c'est-à-dire les conditions (28) (30) (31) (36). La largeur en $\Omega = \omega + m_R^* \frac{\partial h}{\partial J_R}$ du domaine piégé créé par δH est donnée par :

$$\omega_b = \left| \Delta\, m_R^* m_\ell^* \frac{\partial^2 h}{\partial J_R \partial J_\ell} \right|^{1/2}$$

et les particules échappent à ce domaine du fait des collisions au bout du temps γ_E^{-1} où :

$$\gamma_E = \frac{1}{4} \frac{\langle \delta\Omega^2 \rangle}{\omega_b^2}$$

La condition (30) impose que :

$$\omega_b > \gamma_E$$

La perturbation $\delta H'$ exerce des effets de résonances sur les particules piégées par la perturbation δH . Ceci implique évidemment que les deux perturbations définissent deux surfaces de résonances voisines. Soit Σ_o la surface de résonance pour δH :

$$\Omega \equiv \omega + m_R^* \frac{\partial h}{\partial J_R} = 0$$

Le long d'une droite de l'espace J parallèle au vecteur m_R^* ,passant par un point J_R de Σ_o ,nous avons :

$$\Omega' = \omega' + m_R'^* \frac{\partial h}{\partial J_R} = \Omega'(J_R) + X\,\Omega$$

où

$$X = \frac{m_R'^* m_\ell^* \frac{\partial^2 h}{\partial J_R \partial J_\ell}}{m_R^* m_\ell^* \frac{\partial^2 h}{\partial J_R \partial J_\ell}}$$

Nous demandons que la surface de résonance de la perturbation $\delta H'$ seule passe dans le domaine piégé par δH , ceci implique que :

$$A = \omega' - \chi\omega + (n'^{*}_{R} - \chi n^{*}_{R}) \frac{\partial h}{\partial J_R} < \chi \omega_b$$

Nous supposons encore que la largeur du domaine résonant de $\delta H'$ ne déborde pas du domaine piégé de δH c'est-à-dire :

$$\left(\Delta' n'^{*}_{R} n'^{*}_{\ell} \frac{\partial^2 h}{\partial J_R \partial J_\ell} \right)^{1/2} < \chi \omega_b$$

$$< \delta \left(n'^{*}_{R} \frac{\partial h}{\partial J_R} \right)^2 >^{1/3} < \chi \omega_b$$

Cette dernière condition implique que :

$$\gamma_E < \chi \omega_b$$

La démonstration donnée dans l'Annexe III, conduit alors à ajouter à la production d'entropie $\delta \dot{\mathcal{H}}_R(\underline{U})$ due à δH , en régime Zakharov et Karpman , un second terme $\delta \dot{\mathcal{H}}'(\underline{U})$ dû à $\delta H'$ (compte tenu de l'existence de domaine piégé créé par δH) qu'on peut écrire :

$$\delta \dot{\mathcal{H}}'(\underline{U}) = \delta \dot{\mathcal{H}}'_R(\underline{U}) + \delta \dot{\mathcal{H}}''$$

où $\delta \dot{\mathcal{H}}'_R(\underline{U})$ est la production d'entropie due à $\delta H'$ seule en régime Landau, et :

$$\delta \dot{\mathcal{H}}''(\underline{U}) = \frac{1}{T^2} \iint_{\Sigma_0} d\Sigma_0 \; \mathrm{Im} \left\{ \left(\omega' - \chi\omega + (n'^{*}_{R} - \chi n^{*}_{R}) \frac{\partial (h+\Delta)}{\partial J_R} - i\gamma_E^{*} \right)^{-1} \right\}$$

$$\left(\omega' - \chi\omega + (n'^{*}_{R} - n^{*}_{R}) \frac{\partial U}{\partial J_R} \right)^2 F(J,t) (2\pi)^3 2 |\delta'|^2 \left| \frac{\Delta}{n^{*}_{R} n'^{*}_{\ell} \frac{\partial^2 h}{\partial J_R \partial J_\ell}} \right|^{1/2} \times \frac{1}{\chi'^2} \int_0^{2\chi'} J_0^2(\zeta) \zeta \, d\zeta \qquad (42)$$

expression dans laquelle :

- $d\Sigma_0$ est l'élément de surface pris sur la surface de résonance de δH dans l'espace J .

- $\gamma_E^* = X'^2 \gamma_E$

- $X' = X$ si $X > 1$ et $X' = 1$ si $X < 1$

Dans le cas où $X \ll 1$ le calcul détaillé indique qu'une meilleure approximation de $\delta \dot{d}b''(U)$ est obtenue en remplaçant l'intégrale $\int_0^{2X'} J_0^2(\zeta)\, \zeta\, d\zeta$, (où $J_0(\zeta)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0) par $\int_0^{2,5} J_0^2(\zeta)\, \zeta\, d\zeta = 0,78$.
Le mouvement des particules piégées par la perturbation δH a une composante "moyenne" auquel se superpose un mouvement à la fréquence ω_b . L'expression (42) de $\delta \dot{d}b''$ traduit la résonance de $\delta H'$ avec cette composante moyenne. Si la production d'entropie $\delta \dot{d}b''$ est plus importante que la production $\delta \dot{d}b'_R$ due à l'effet Landau associé à la perturbation $\delta H'$, les résonances éventuelles faisant intervenir la fréquence ω_b correspondent à une production d'entropie très inférieure à $\delta \dot{d}b''$. Nous avons donc en fait $\delta \dot{d}b'' \gg \delta \dot{d}b'_R$ sauf si :

$$\gamma_E^* > \omega_b \Rightarrow X > \left(\frac{\omega_b}{\gamma_E}\right)^{1/2}$$

ou

$$\omega' - X\omega + (n'^*_R - X n^*_R)\, \frac{\partial (h+1)}{\partial J_R} > \omega_b$$

dans ce cas, la contribution de $\delta H'$ à $\delta \dot{d}b'$ reprend la forme $\delta \dot{d}b'_R$ Landau.

2) Evolution dans une situation stochastique

Plaçons nous maintenant dans une situation où la perturbation à l'Hamiltonien $h(J)$ est constituée par la somme d'un grand nombre de perturbations élémentaires (de même amplitude pour simplifier) appelées "modes" :

$$\delta H = \sum h_+(J) \exp i(m_k^* \phi_k + \omega t) + c.c. \qquad (43)$$

chacune d'entre elles créant une surface de résonance $\Omega \equiv m_k^* (\partial h/\partial J_k) + \omega = 0$ voisine des autres parce que, soit les triplets m_k^*, soit les fréquences ω des divers modes successifs sont voisins.

Nous supposerons que la condition de stochasticité est réalisée [12][13] ; celle-ci s'exprime en écrivant que la largeur d'un domaine piégé élémentaire comptée en Ω : $\Delta\Omega_I = \sqrt{2\alpha h_+}$ est supérieure à l'intervalle entre domaine piégé, c'est-à-dire $1/\nu$ où $\nu d\Omega$ est le nombre de fréquence $\Omega(J)$ dans un intervalle $[0, d\Omega]$. Introduisant le paramètre de stochasticité $s = \nu \Delta\Omega_I$ cette condition s'écrit :

$$s = \frac{\Delta\Omega_I}{(1/\nu)} \gg 1$$

Nous ne nous intéressons pas ici à l'expression de la fonctionnelle $\delta\mathcal{H}(\underline{U})$ créée par la somme de ces perturbations mais directement au coefficient de diffusion qui leur est dû dans l'espace J. Nous faisons tout d'abord l'hypothèse, que nous vérifierons à postériori que chaque perturbation élémentaire se trouve, du fait de la diffusion dans l'espace J due à l'action des autres, dans des conditions où les résultats du § III en régime Landau peuvent être appliqués. Compte tenu de (40), l'ensemble de ces perturbations crée un coefficient de diffusion dans l'espace J :

$$(D_{k\ell}^*)_{Pert} = 2\pi m_k^* m_\ell^* |h_+|^2 \nu \qquad (44)$$

Pour vérifier les conditions de validité du régime Landau supposé, il suffit de reprendre dans le paragraphe III, les conditions (30) (31) (35) en considérant maintenant que les quantités $\langle \delta\Omega^2 \rangle$ et τ_c^{-1} sont en partie dues aux perturbations δH. Nous avons alors :

$$\langle \delta\Omega^2 \rangle > \frac{\partial\Omega}{\partial J_k} \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial J_\ell} \cdot 2\pi\nu\, m_k^* m_\ell^* |h_+|^2$$

et la condition d'existence (35) du régime Landau, pour chaque perturbation élémentaire qui s'écrit $\langle \delta\Omega^2 \rangle^{1/3} > \Delta\Omega_I$ est réalisée compte tenu de la condition de stochasticité $s \gg 1$.

D'autre part la condition (35) implique que :

$$\frac{<\delta\Omega^2>}{4\alpha\Delta} > <\delta\Omega^2>^{1/3}$$

de sorte que la condition (30) : $<\delta\Omega^2>/4\alpha\Delta \gg \tau_c^{-1}$ est une conséquence de la condition (31) : $<\delta\Omega^2>^{1/3} > \tau_c^{-1}$. Supposant d'abord que les coefficients de diffusion $<\delta J_R\, \delta J_\ell>$ et $<\delta\varphi^2>$ sont essentiellement dus aux perturbations, cette condition s'écrit :

$$<\delta\Omega^2>_{Pert}^{1/3} \gg Sup\left(\frac{<\delta J_R\, \delta J_\ell>_{Pert}}{\Delta J_R\, \Delta J_\ell}, <\delta(m_R^* \phi_R)^2>_{Pert}\right) \qquad (45)$$

où

$$<\delta\Omega^2>_{Pert}^{1/3} = \left(2\pi m_R^* m_\ell^* |h_+|^2 \nu \frac{\partial\Omega}{\partial J_R}\frac{\partial\Omega}{\partial J_\ell}\right)^{1/3} = \left(4\pi\alpha^2 |h_+|^2 \nu\right)^{1/3}$$

et

$$\frac{<\delta J_R\, \delta J_\ell>_{Pert}}{\Delta J_R\, \Delta J_\ell} = \frac{2\pi m_R^* m_\ell^* \nu |h_+|^2}{\Delta J_R\, \Delta J_\ell}$$

Enfin le coefficient $<\delta(m_\ell^* \phi_R)^2>_{Pert}$ est obtenu en remarquant que pendant un intervalle de temps dt, la variation de $m_R^* \phi_R$ due à l'action d'un seul h_+ est de la forme :

$$d(m_R^* \phi_R) \sim m_R^* \frac{\partial h_+}{\partial J_R}\, dt$$

et donc

$$<\delta(m_R^* \phi_R)^2> = m_R^* \frac{|h_+|^2}{\delta J_R^2}$$

où δJ_R est l'échelle de variation de h_+ dans la direction J_R ($\Delta J_R \lesssim \delta J_R$). En ajoutant toutes les perturbations élémentaires, il vient :

$$<\delta(m_R^* \phi_R)^2> = \nu \left(\frac{m_R^*}{\delta J_R}\right)^2 |h_+|^2 < \frac{<\delta J_R\, \delta J_\ell>}{\Delta J_R\, \Delta J_\ell}$$

La condition double (45) se réduit donc à :

$$<\delta\Omega^2>^{1/3} \gtrsim \frac{<\delta J_R\, \delta J_\ell>}{\Delta J_R\, \Delta J_\ell}$$

et est vérifiée si :

$$\nu^{2/3} (\Delta\Omega_\tau)^{8/3} < \Omega_p^2 \qquad (46)$$

en calculant $\Omega_p = m_k^* \left(\partial^2 h / \partial J_k \partial J_\ell\right) \Delta J_\ell$, avec éventuellement comme ΔJ_ℓ l'échelle caractéristique de h_+ , c'est-à-dire δJ_ℓ dans la direction J_ℓ. Notre hypothèse de départ est donc vérifiée à postériori si la condition (46) est vérifiée, et bien entendu si la condition (31) est encore vérifiée avec la valeur collisionnelle de ν_c c'est-à-dire si :

$$\langle \delta\Omega^2 \rangle^{1/3}_{Pert} > Sup\left(\frac{\langle \delta J_k \delta J_\ell \rangle_{coll}}{\Delta J_k \Delta J_\ell}, \langle \delta\varphi^2 \rangle_{coll} \right) \qquad (47)$$

Nous avons implicitement supposé que les coefficients de la diffusion induite par la perturbation δH étaient stationnaires au cours du temps le long d'une trajectoire, c'est-à-dire que la condition (32) était satisfaite par les coefficients $D^*_{k\ell}$. Il n'en est ainsi que si les modes (m_k^*, ω) n'ont pas de corrélation entre eux. Cependant il est possible que la perturbation δH n'exerce une diffusion qu'à des instants privilégiés, $t, t+\tau, t+2\tau, \ldots$ par exemple si :

$$\delta H = h_+ \exp i(\omega t + m_k^* \phi_k) \times \tau \sum_p \delta(t - p\tau) + c.c.$$

ou encore

$$\delta H = h_+ \exp i(\omega t + \delta\omega \cos\omega_1 t) \exp i m_k^* \phi_k + c.c.$$

$$\delta H = h_+ \exp i m_k^* \phi_k \sum_p J_p(\omega, t) \exp i(\omega + p\delta\omega)t + c.c.$$

auxquels cas la perturbation δH n'exerce une diffusion qu'aux instants tels que $\phi_1 = 0$ en $\omega_1 t = 2m\pi$ ou tels que la condition de résonance soit réalisée :

$$\omega + \delta\omega \cos\omega_1 t + m_k^* \frac{\partial h}{\partial J_k} = 0$$

La condition (45) ne peut évidemment pas être appliquée dans ce cas.

Le raisonnement qui précède, donnant les conditions pour qu'un mode caractérisé par (m_k^*, ω) entre dans le régime Landau du fait de la diffusion causée par les modes voisins $(m_k'^*, \omega')$, serait évidemment valable si

les fréquences $|\omega' + m'^{*}_{k}(\partial h/\partial J_k)|$ étaient beaucoup plus grandes que les fréquences $|\omega + m_k(\partial h/\partial J_k)|$; dans ce cas l'action des modes (m'^{*}_{k}, ω') vis-à-vis du mode (m_k, ω) pourrait être réellement assimilé à un effet collisionnel. Comme les fréquences $|\omega' + m'^{*}_{k}(\partial h/\partial J_k)|$ sont du même ordre que les fréquences $|\omega + m_k(\partial h/\partial J_k)|$ ce raisonnement n'est qu'approximatif. En fait il est bien connu que le comportement d'une assemblée de particules en présence d'une perturbation rendant les trajectoires stochastiques $(A \gg 1)$, dépend fondamentalement du temps caractéristique t^* au bout duquel deux trajectoires issues de deux points voisins se trouvent séparées, conformément à une formule du type :[14][15]

$$\delta = \delta_0 \exp \frac{t}{t^*}$$

où δ est la distance, supposée petite, entre les trajectoires. Si pendant un temps de l'ordre de t^* , la diffusion collisionnelle dans la cellule d'extension $\Delta J_1 \times \Delta J_2 \times \Delta J_3$ est faible, la perturbation δH induit les coefficients quasilinéaires donnés par (40). Compte tenu de la condition (31) nous pouvons donc approximativement identifier :

$$t^{*-1} \sim \left(<\delta\Omega^2>_{Pert}\right)^{1/3} = \left(4\pi\alpha |h_+|^2 \nu\right)^{1/3}$$

Dans le cas où il existe une corrélation entre les composantes (m^*_k, ω) de la perturbation δH , de sorte que cette perturbation exerce une diffusion à des instants $t, t+\tau, t+2\tau, \ldots$ et que le temps $\tau > \left(<\delta\Omega^2>_{Pert}\right)^{-1/3}$ le temps t^* doit être identifié à τ plutôt qu'à $\left(<\delta\Omega^2>_{Pert}\right)^{-1/3}$

Une autre manière d'étudier la diffusion dans une situation stochastique est de compter, au voisinage d'une surface de résonance, le nombre de modes non corrélés perturbant effectivement le mouvement d'une particule et d'évaluer le temps d'interaction entre la particule et cet ensemble de modes. Partant donc d'un ensemble de perturbations élémentaires de type (43) non corrélées, il faut définir un temps t^* et prélever dans l'Hamiltonien δH , un Hamiltonien ΔH , somme de N modes , tels que l'action de δH sur une particule soit équivalente à une suite d'impulsions statistiquement indépendantes d'amplitude ΔH pendant t^* . Les N modes étant indépendants $\Delta H = \sqrt{N}\, h_+$. Le coefficient de diffusion $<\delta J_k\, \delta J_\ell>$ sera alors :

$$D_{k\ell} = <\delta J_k\, \delta J_\ell> = 2\pi\, m^*_k\, m^*_\ell\, \Delta H^2\, t^* \qquad (48)$$

le temps t^* et le nombre N sont définis d'une part en écrivant que le nombre N de modes doit être tel que la plage en Ω des modes pris en compte est soit Ω_p, soit $(1/t^*)$ de manière à bien compter tous les modes agissant sur la particule. Introduisant la densité de mode ν par $N = \nu\Omega$ on a $\Omega = Sup(1/t^*, \Omega_p)$ ce qui se traduit dans un diagramme (N, t^*) par la courbe de la figure 3.

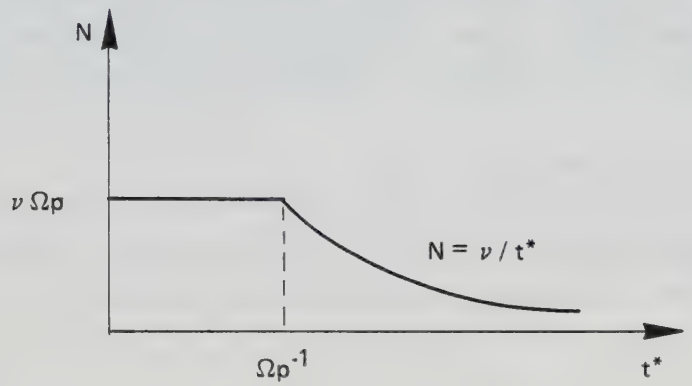


FIG 3 : Nombre de modes effectifs N en fonction du temps caractéristique (1ère Condition)

Nous écrivons d'autre part que pendant le temps t^* la particule subit une impulsion $\Delta\Omega$ de l'ordre de grandeur de la plage en Ω des modes pris en compte, soit encore ici $\Delta\Omega = Sup\,(1/t^*, \Omega_p)$ avec $\Delta\Omega = (\partial\Omega/\partial J_k)\,\Delta J_k$ où ΔJ_k est l'impulsion reçue par la particule : $\Delta J_k = m_k^* \Delta H\, t^* = m_k^* \sqrt{N}\, h_\bullet\, t^*$, cette condition se traduit dans le diagramme (N, t^*) par la courbe de la figure 4.

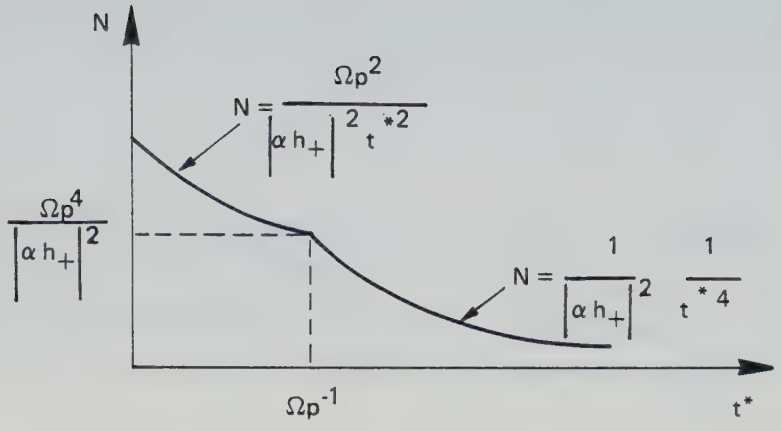


FIG 4 : Nombre de modes effectifs N en fonction du temps caractéristique ($2^{ème}$Condition)

L'ensemble de ces deux conditions donne les valeurs de N et t^* à choisir ; ceci s'obtient graphiquement par l'intersection des deux courbes obtenues et deux régimes se présentent.

Le premier régime où $\Omega_p^4 / |\alpha h_+|^2 > \nu \Omega_p$, c'est-à-dire lorsqu'on retrouve la condition quasilinéaire vue précédemment, donne des valeurs de $t^* = (|\alpha h_+|^2 \nu)^{-1/3}$ et $N = \nu^{4/3} |\alpha h_+|^{2/3} = s^{4/3} > 1$ qui reportées dans (48) donnent de nouveau le terme de diffusion quasilinéaire obtenu précédemment de manière plus directe (44).

Le second régime, $\Omega_p > \nu^{1/3} (\Delta \Omega_z)^{4/3}$, régime où l'on sort du domaine quasilinéaire, donne des valeurs de $t^* = [\Omega_p / \nu |\alpha h_+|^2]^{1/2}$ et $N = \nu \Omega_p$ qui reportées dans (48) fournissent l'expression d'un coefficient de diffusion non quasilinéaire :

$$D_{kl} = 2\pi m_k^* m_l^* \nu^{1/2} \Omega_p^{3/2} \frac{h_+}{\alpha}$$

Sur la figure 5, on a reporté, en fonction de l'amplitude h_+ des modes élémentaires l'expression des coefficients de diffusion obtenus dans les différents régimes, en fonction des paramètres s, ν, Ω_p, h_+.

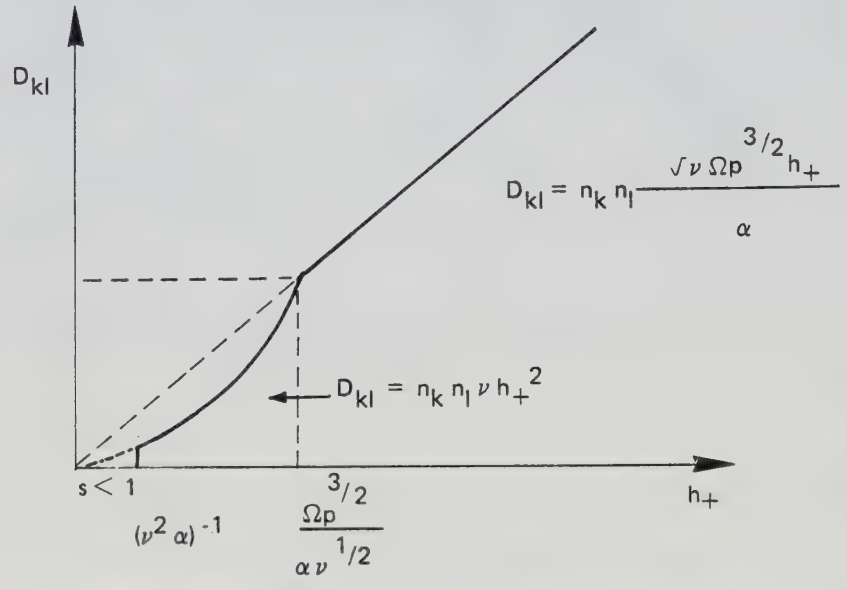


FIG 5 : Coefficients de diffusion dans les différents régimes en fonction de l'amplitude h_+ du mode élémentaire

A.V - DETERMINATION DU CHAMP AUTOCOHERENT DANS LE PLASMA

Nous avons vu précédemment que si le champ autocohérent dans le plasma, spécifié par les potentiels $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$, $\Psi(\vec{x}, t)$, permet l'existence de variables angulaires et d'action ϕ_k J_k pour chaque assemblée, ce champ pouvait être calculé à chaque instant en rendant extremum la fonctionnelle :

$$\mathcal{W}(\underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi}) = \iiint \left(-\frac{|\vec{\nabla} \times \underline{\vec{\mathcal{A}}}|^2}{8\pi} + \frac{|\vec{\nabla} \underline{\Psi}|^2}{3\pi} \right) d_3x - \sum_\alpha \iiint f_\alpha(J, t)\, h(J, \underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi})(2\pi)^3 d_3J \qquad (49)$$

pour toutes les valeurs de $\underline{\vec{\mathcal{A}}}$, $\underline{\Psi}$, au voisinage de $\vec{\mathcal{A}}$, Ψ , préservant les valeurs de $\mathcal{A}_n$ et de Ψ sur une frontière entourant le plasma. Le champ $\underline{\vec{\mathcal{A}}}$, $\underline{\Psi}$ doit faire partie de l'ensemble des champs pour lesquels existent des variables angulaires et d'action $\underline{\phi}_k$, $\underline{J}_k$ dérivant continument du système ϕ_k , J_k . La fonction $h(J, \underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi})$ des variables J est définie par :

$$\underline{\mathcal{H}}(\vec{x}, \vec{p}, t) = h(J, \underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi})$$

où $\underline{\mathcal{H}}(\vec{x}, \vec{p}, t)$ est l'Hamiltonien créé par le champ $\underline{\vec{\mathcal{A}}}$, $\underline{\Psi}$. Pour chaque valeur de J , la fonction $h(J, \underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi})$ est une fonctionnelle du champ $\underline{\vec{\mathcal{A}}}$, $\underline{\Psi}$.

Nous considérons maintenant des situations où les potentiels $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$, $\Psi(\vec{x}, t)$ont la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) &= \vec{A}(\vec{x}, t) + \delta\vec{A}(\vec{x}, t) \\ \Psi(\vec{x}, t) &= \Psi(\vec{x}, t) + \delta\Psi(\vec{x}, t) \end{aligned} \qquad (50)$$

où les potentiels $\vec{A}(\vec{x}, t)$, $\Psi(\vec{x}, t)$ varient lentement dans le temps et produisent un Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p}, t) = (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2/2m + e\Psi = h(J, t)$

pour lequel il existe des variables angulaires et d'action Φ_k , J_k , et où d'autre part les perturbations $\delta\vec{A}(\vec{x},t)$, $\delta\Psi(\vec{x},t)$ correspondent à un mode de la forme :

$$\delta\vec{A} = \left(\vec{A}_+(\vec{x})\exp i\omega t + \text{c.c.}\right)\exp\gamma t + \mathcal{O}(\delta\vec{A}^2, \delta\Psi^2)$$

$$\delta\Psi = \left(\Psi_+(\vec{x})\exp i\omega t + \text{c.c.}\right)\exp\gamma t + \mathcal{O}(\delta\vec{A}^2, \delta\Psi^2) \qquad (51)$$

ajoutant à H une perturbation

$$\delta H = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\left(-\frac{e}{c}\delta\vec{A}\right) + e\,\delta\Psi + \mathcal{O}(\delta\vec{A}^2, \delta\Psi^2)$$

Nous pouvons écrire δH comme la somme de termes de la forme (41) c'est-à-dire, au premier ordre :

$$\delta H = \sum_m \left(h_m(J,t)\exp(i m_k \phi_k + i\omega t) + \text{c.c.}\right)\exp\gamma t$$

Nous admettrons que les productions d'entropies $\delta\dot{\mathcal{A}}(\underline{U})$ élémentaires données ci-dessus et leur sommation sont valides. Nous utilisons de nouveau la classe de potentiels $\underline{\vec{A}}(\vec{x},t)$, $\underline{\Psi}(\vec{x},t)$ correspondant à des Hamiltoniens :

$$\underline{H}(\vec{x},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\underline{\vec{A}}\right)^2 + e\,\underline{\Psi} \qquad (52)$$

pour lesquels un système de variables angulaires et d'action $\underline{J}_k(\vec{x},\vec{p})$, $\underline{\Phi}_k(\vec{x},\vec{p})$ existe et dérive continument du système $J_k(\vec{x},\vec{p},t)$, $\Phi_k(\vec{x},\vec{p},t)$ associé à $H(\vec{x},\vec{p},t)$, nous avons alors $\underline{H}(\vec{x},\vec{p},t) = \underline{h}(J, \underline{\mathcal{A}}(x), \underline{\Psi}(\vec{x}))$. Les potentiels $\vec{A}(\vec{x},t)$, $\Psi(\vec{x},t)$ doivent être choisi à chaque instant t parmi les champs $\underline{\vec{A}}(\vec{x},t)$, $\underline{\Psi}(\vec{x},t)$. Pour des fonctions $f_\alpha(J,t)$ données pour chaque assemblée α , cette sélection peut être encore opérée, au premier ordre en $\delta\vec{A}$, $\delta\Psi$, en exprimant que la fonctionnelle $\mathcal{N}(\underline{\mathcal{A}}, \underline{\Psi})$ (49) est extremum pour les variations de $\underline{\vec{A}}$, $\underline{\Psi}$ au voisinage de $\vec{A}$, Ψ préservant les valeurs de A_n et Ψ données sur une surface englobant le plasma.

Le champ $\vec{A}_+(\vec{x})$, $\Psi_+(\vec{x})$ du mode (51) peut être aussi obtenu par un

principe variationnel. On démontre à la fin de l'Annexe II que nous devons avoir pour toutes les variations du champ $\underline{\vec{A}}_+(\vec{x})$, $\underline{\Psi}_+(\vec{x})$ au voisinage de $\vec{A}_+(\vec{x})$, $\Psi_+(\vec{x})$ préservant $A_{+//}$ et Ψ_+ aux limites :

$$d\,\mathcal{L}(\underline{\vec{A}}_+(\vec{x}), \underline{\Psi}_+(\vec{x}), \omega) = 0 \tag{53}$$

où la fonctionnelle $\mathcal{L}(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega)$ est la forme linéaire en $\underline{\vec{A}}_+^*$, $\underline{\Psi}_+^*$ donnée par :

$$\mathcal{L}(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) = \mathcal{L}_{em}(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+ \omega) + \sum_\alpha \left(\mathcal{L}_\alpha(\underline{\vec{A}}_+, \Psi_+) + \mathcal{L}'_\alpha(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) + i\,\mathcal{L}''_\alpha(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) \right) \tag{54}$$

où :

$$\mathcal{L}_{em}(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint \left[\left(-\vec{\nabla}\Psi_+ - \frac{i\omega}{c}\vec{A}_+\right)\left(-\vec{\nabla}\underline{\Psi}_+^* + \frac{i\omega}{c}\underline{\vec{A}}_+^*\right) - |\vec{\nabla}\times\vec{A}_+|\cdot|\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}}_+| \right] d_3x \tag{55}$$

$$\mathcal{L}_\alpha(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+) = -\int\!\!\ldots \mathcal{F}_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t) \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha c^2} \left| \vec{A}_+ \underline{\vec{A}}_+^* \right| d_3x\, d_3p \tag{56}$$

$$\mathcal{L}'_\alpha(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) = -\sum_m \mathcal{PP} \iiint \left(m_\ell \frac{\partial f_\alpha(J,t)}{\partial J_\ell} \right) \frac{h_m \underline{h}_m^*}{\omega + m_\ell \frac{\partial h}{\partial J_\ell}} (2\pi)^3 d_3J \tag{57}$$

$$\mathcal{L}''_\alpha(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) = -\sum_m \iiint \left(m_\ell \frac{\partial f_\alpha(J,t)}{\partial J_\ell} \right) \frac{I(2|h_m|^2, J, t)}{2|h_m|^2} |h_m \underline{h}_m^*|\, \delta\left(\omega + m_\ell \frac{\partial h}{\partial J_\ell}\right) (2\pi)^3 d_3J \tag{58}$$

et les variables $\underline{h}_m(J)$ sont définies par :

$$\frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\left(-\frac{e}{c}\underline{\vec{A}}_+\right) + e\,\underline{\Psi}_+ = \sum_m \underline{h}_m(J) \exp i\, m_\ell \phi_\ell$$

les quantités $\mathcal{L}_{em}$, $\mathcal{L}_\alpha$, $\mathcal{L}'_\alpha$, $\mathcal{L}''_\alpha$ sont réelles pour $(\vec{A}_+, \Psi_+) = (\vec{A}_+, \Psi_+)$.

L'énergie du plasma et du champ électromagnétique à l'intérieur de ses limites est donnée au second ordre en $\delta\vec{A}$, $\delta\Psi$ par :

$$\mathcal{E}_T = -\mathcal{N}(\vec{A}, \Psi) + \Big[\sum_\alpha \left(-2\mathcal{L}'_\alpha(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) - \mathcal{L}_\alpha(\vec{A}_+, \Psi_+) \right) - \mathcal{L}_{em}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) + \omega \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \omega} \Big] \exp 2\gamma t \tag{59}$$

Comme $\mathcal{N}(\vec{A}, \Psi)$ est extremum pour $\vec{A}$, Ψ au voisinage de $\vec{A}$, Ψ nous avons :

$$-\frac{d\mathcal{N}(\vec{A}, \Psi)}{dt} = \sum_\alpha \iiint \frac{\partial f_\alpha(J,t)}{\partial t} h(J,t) (2\pi)^3 d_3 J$$

et, en utilisant le principe variationnel précédent (27) (33) avec pour toutes les assemblées α : $U(J) - U(J) = \varepsilon h(J)$, $\varepsilon \to 0$:

$$-\frac{d\mathcal{N}(\vec{A}, \Psi)}{dt} = -\frac{T}{2} \left[\frac{\dot{S}(U+\varepsilon h, \dots) - \dot{S}(U, \dots)}{\varepsilon} + \frac{\delta\dot{\mathcal{H}}(U+\varepsilon h, \dots) - \delta\dot{\mathcal{H}}(U, \dots)}{\varepsilon} \right]$$

Utilisant (7) et (9) pour calculer $\dot{S}(U+\varepsilon h, \dots)$ il vient :

$$-\frac{d\mathcal{N}(\vec{A}, \Psi)}{dt} = 2\omega (N_R + N_b) \exp 2\gamma t + 2\gamma N_\gamma \exp 2\gamma t \tag{60}$$

$$N_R = \frac{1}{2} \sum_\alpha \iiint \sum_m \left(m_R \frac{\partial f_\alpha(J,t)}{\partial J_R} \right) I\left(2|h_m h_m^*|^{1/2}, J, t \right) \delta\left(\omega + m_R \frac{\partial h}{\partial J_R} \right) (2\pi)^3 d_3 J = -\sum_\alpha \mathcal{L}''_\alpha$$

$$N_b = -\frac{1}{2} \sum_\alpha \int \dots \mathcal{D}\Big(U \exp -\gamma t + \Big(\sum_m \frac{m_R \frac{\partial U}{\partial J_R} + \omega}{m_R \frac{\partial h}{\partial J_R} + \omega} h_m \exp(i m_R \phi_R + \omega t) + \text{c.c.} \Big) \Big[\sum_m \frac{h_m \exp i(m_R \phi_R + \omega t)}{\omega + m_R \frac{\partial h}{\partial J_R}} + \text{c.c.} \Big] d_3 x\, d_3 p\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$N_\gamma = -\sum_\alpha \iiint \sum_m \left(m_R \frac{\partial f_\alpha(J,t)}{\partial J_R} \right) \frac{m_R \frac{\partial h}{\partial J_R}}{\left(\omega + m_R \frac{\partial h}{\partial J_R} \right)^2} |h_m|^2 (2\pi)^3 d_3 J = \sum_\alpha \left[\mathcal{L}'_\alpha + \omega \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha}{\partial \omega} \right]$$

où les termes divergents au voisinage des surface de résonances $\omega + m_R \frac{\partial h}{\partial J_R} = 0$ n'ont pas à être pris en compte dans N_b et N_γ .

Si l'amplitude du mode est maintenue à un niveau constant par les conditions aux limites choisies, la quantité $- d\mathcal{W}(\vec{A}, \Psi) / dt$ est la puissance $\mathcal{W}$ que le mode fournit au plasma sous forme d'énergie thermique et électromagnétique quasistatique. Cette puissance est alors donnée par (60) avec $\gamma = 0$ c'est-à-dire :

$$\mathcal{W} = 2\omega (N_R + N_b) = -2\omega \sum_\alpha \mathcal{L}''_\alpha (\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) + 2\omega N_b$$

$$\mathcal{W} = -2\omega \, \mathcal{I}m \left(\mathcal{L} (\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) \right) + 2\omega N_b$$

Si le mode est un mode propre correspondant aux conditions $A_{+n} = \Psi_+ = 0$ à la frontière, on voit directement que le principe $d\mathcal{L}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) = 0$ impose que $\mathcal{L}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) = 0$. Nous avons alors :

$$\mathcal{R}_e \left(\mathcal{L} (\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) \right) = \mathcal{L}_{em} (\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) + \sum_\alpha \left[\mathcal{L}_\alpha + \mathcal{L}'_\alpha \right] = 0 \qquad (61)$$

Cette équation peut être utilisée pour déterminer la fréquence réelle lorsque la structure géométrique du mode, c'est-à-dire le champ $\vec{A}_+(\vec{x})$, $\Psi_+(\vec{x})$ est connu. Le taux de croissance γ (petit par hypothèse) résulte de la conservation de l'énergie $\mathcal{E}_T$ qui se réduit à :

$$\mathcal{E}_T = -\mathcal{W}(\vec{A}, \Psi) + \left[\omega \frac{\partial \mathcal{L}_{em}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega)}{\partial \omega} - \sum_\alpha \mathcal{L}'_\alpha (\vec{A}_+, \Psi_+, \omega) \right] \exp 2\gamma t$$

Utilisant (60) et (54) on obtient :

$$\gamma \frac{\partial \mathcal{R}_e (\mathcal{L})}{\partial \omega} + N_R + N_b = 0 \qquad (62)$$

Si la puissance résonante $2\omega N_R = -2\omega \, \mathcal{I}m (\mathcal{L})$ est plus grande que la puissance $2\omega N_b$ due aux collisions dans la masse des assemblées, les équations (61) et (62) peuvent être écrites $\mathcal{L}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega - i\gamma) = 0$ Dans le cas Landau $(I(\Delta, t) = (\pi/2)\Delta^2)$ la fréquence complexe $\omega' = \omega - i\gamma$ sera déterminée par l'équation [16] [17] :

$$\mathcal{L}_{em}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega') + \sum_{\alpha} \left[\mathcal{L}'_{\alpha}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega') + \mathcal{L}_{\alpha}(\vec{A}_+, \Psi_+) \right] = 0$$

continuée analytiquement à partir du demi-plan $\mathcal{I}m(\omega') < 0$.

A.VI - GENERALISATION DU PRINCIPE VARIATIONNEL SIMPLIFIE A UNE SITUATION OU LES TRAJECTOIRES SONT INTEGRABLES DANS UN CHAMP QUASI PERIODIQUE

Les résultats qui précèdent peuvent être encore généralisés dans le cas où les trajectoires sont intégrables dans un champ $\vec{\mathcal{A}}$, Ψ quasi périodique :

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \cdots)$$

$$\Psi = \Psi(\vec{x}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \cdots)$$

lentement variable en t, et produisant pour une assemblée de particules un Hamiltonien :

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \cdots)$$

On se ramène aux situations précédentes en considérant $\omega_1 t$, $\omega_2 t$, ... comme des variables angulaires φ_1 , φ_2 , ... supplémentaires, canoniquement conjuguées à des variables j_1 , j_2 , ... L'Hamiltonien pour la particule à 3 + ... degrés de liberté est alors évidemment :

$$\mathcal{H}^{\omega} = \mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, t, \varphi_1, \varphi_2, \cdots) + \omega_1 j_1 + \omega_2 j_2 + \cdots \qquad (63)$$

Si les trajectoires sont intégrables on peut construire un système de variables angulaires et d'action pour $\mathcal{H}^{\omega}$:

$$\Phi^{\omega} \quad , \quad J^{\omega}$$

Parmi les variables Φ^{ω} doivent figurer les variables φ_1 , φ_2 ... qui dépendent linéairement du temps. Les variables d'action conjuguées sont évidemment définies avec la même constante additive arbitraire que les variables j_1 , j_2 ... Le système complet Φ^{ω} , J^{ω} de variables angulaires et d'action est donc de la forme :

$$\Phi_k^\omega(\vec{x}, \vec{p}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, t) \quad ; \quad J_k^\omega(\vec{x}, \vec{p}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, t)$$

$$\varphi_1 \qquad\qquad j_1^\omega = j_1 + g_1(\vec{x}, \vec{p}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, t)$$
$$\varphi_2 \qquad\qquad j_2^\omega = j_2 + g_2(\vec{x}, \vec{p}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, t)$$
$$\dots \qquad\qquad \dots$$

L'Hamiltonien $\mathcal{H}^\omega$ (63) s'écrivant dans ce système:

$$\mathcal{H}^\omega = h(J^\omega) + \omega_1 j_1 + \omega_2 j_2 + \dots$$

En régime faiblement collisionnel et pour une faible dépendance en t de $\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, t, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$, chaque assemblée de particules est décrite par une fonction de distribution $\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{p}, t)$, fonction des variables J^ω ; cette fonction doit être indépendante des constantes arbitraires dans j_1^ω, j_2^ω, ... et ne peut donc dépendre que de $J_k^\omega = (J_1^\omega, J_2^\omega, J_3^\omega)$:

$$\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{p}, t) = f(J_k^\omega, t)$$
$$\iiint (2\pi)^3 f(J_k^\omega, t)\, d_3 J_k^\omega = \text{nombre de particules} \qquad (64)$$

Nous pouvons immédiatement généraliser le principe d'extrémum (49). Si le champ $\underline{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{x}, \vec{p}, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$, $\underline{\Psi}(\vec{x}, \vec{p}, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$ produit à l'instant t des trajectoires intégrables et un Hamiltonien

$$\underline{\mathcal{H}}^\omega = \underline{h}(\underline{J}^\omega) + \omega_1 \underline{j}_1^\omega + \omega_2 \underline{j}_2^\omega + \dots$$
$$\underline{h}(J^\omega) = h(J^\omega, \underline{\vec{\mathcal{B}}}, \underline{\Psi})$$

la fonctionnelle :

$$\mathcal{N}^\omega(\underline{\vec{\mathcal{B}}}, \underline{\Psi}) = \int \dots \left\{ -\frac{|\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}}|^2}{8\pi} + \frac{1}{8\pi} \left| \vec{\nabla} \underline{\Psi} + \frac{1}{c}\left(\omega_1 \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial \omega_1 t} + \dots\right)\right|^2 \right\} d_3 x \, \frac{d\omega_1 t}{2\pi} \, \frac{d\omega_2 t}{2\pi} \dots$$

$$- \sum_\alpha \int \dots f(J)\, h(J, \underline{\vec{\mathcal{B}}}, \underline{\Psi})\, (2\pi)^3 d_3 J$$

est extrémum pour $(\underline{\vec{\mathcal{A}}}, \underline{\Psi}) = (\vec{\mathcal{A}}, \Psi)$. La fonctionnelle $\mathcal{N}^\omega$ est en fait une fonctionnelle $\mathcal{N}^\omega(\underline{\vec{\mathcal{A}}}_p, \underline{\Psi}_p, \omega_1, \omega_2, \cdots)$ des champs $\underline{\vec{\mathcal{A}}}_p$, $\underline{\Psi}_p$ définis par :

$$\underline{\vec{\mathcal{A}}} = \Sigma_p \; \underline{\vec{\mathcal{A}}}_p(\vec{x}) \exp i(p_m \omega_m t) \qquad p = (p_1, p_2, \cdots)$$

$$\underline{\Psi} = \sum_p \; \underline{\Psi}_p(\vec{x}) \exp i(p_m \omega_m t)$$

On montre que l'énergie du plasma et du champ électromagnétique dans le plasma est donnée par :

$$\mathcal{E}_T = -\mathcal{N}^\omega + \omega_1 \frac{\partial \mathcal{N}^\omega}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial \mathcal{N}^\omega}{\partial \omega_2} + \cdots$$

De même le principe (17) peut être généralisé. Posant pour chaque assemblée :

$$f(J_k^\omega, t) = A \exp -\left(\frac{h(J_k^\omega) + \omega_1 j_1^\omega + \omega_2 j_2^\omega + \cdots - U(J_k^\omega) - \omega_1 j_1^\omega - \omega_2 j_2^\omega - \cdots}{T} \right)$$

la fonctionnelle

$$\iiint \frac{\partial f(J_k^\omega, t)}{\partial t} \underline{U}(J)(2\pi)^3 d_3 J^\omega + \dot{S}\left(\underline{U}(J_k^\omega) + \underline{\omega}_1 j_1^\omega + \underline{\omega}_2 j_2^\omega + \cdots \right)$$

doit être extrémum pour $\underline{U}(J_k^\omega) = U(J_k^\omega)$, $\underline{\omega}_1 = \omega_1$, $\underline{\omega}_2 = \omega_2$, ... Les termes $\iiint (\partial f/\partial t).(\underline{\omega}_1 j_1^\omega + \underline{\omega}_2 j_2^\omega + \cdots) \, d j_1^\omega \, d j_2^\omega \cdots d_3 J_k^\omega$ s'éliminent à cause de la conservation du nombre de particules (64). Bien entendu la production d'entropie $\dot{S}\left(\underline{U}(J_k^\omega) + \underline{\omega}_1 j_1^\omega + \underline{\omega}_2 j_2^\omega + \cdots \right)$ doit être prise en moyenne en $\omega_1 t$, $\omega_2 t$, ... On peut aussi généraliser les formules de perturbation données dans A.III et A.IV, et la relation de dispersion (61).

On notera que le principe d'extrémum ci-dessus détermine les fréquences ω_1 , ω_2 , ..., si elles ne sont pas imposées de l'extérieur. Une variation $\underline{\omega}_1 - \omega_1$, $\underline{\omega}_2 - \omega_2$, ... correspond alors à une variation des vitesses de phase du champ par rapport aux vitesses macroscopiques de chaque assemblée. Les fréquences $\underline{\omega}_1$, $\underline{\omega}_2$, tendent donc à rendre extrémum la production d'entropie associée aux différences entre les vitesses de phase du champ et les vitesses macroscopiques de chaque assemblée. En fait les fréquences ω_1 , ω_2 , ... peuvent être déterminées, soit par ce principe d'extrémum, soit par les

conditions aux limites imposées de l'extérieur du plasma et le principe d'extrémum de la fonctionnelle $\mathcal{W}(\vec{\mathcal{B}}, \underline{\Psi})$. Dans cette deuxième situation, c'est l'énergie du plasma qui est à peu près minimisée, et si ce régime conduit à une production d'entropie très importante, il est raisonnable de penser qu'il ne peut pas subsister et que les fréquences ω_1 , ω_2 ,... tendront plutôt à minimiser la production d'entropie. Si $\Delta \mathcal{E}$ et $\Delta \dot{S}$ sont les différences d'énergie et de production d'entropie entre les deux régimes, la transition devrait se faire quand :

$$|\Delta \mathcal{E}| \sim |\Delta \dot{S}| \cdot \mathcal{O}(\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}, \ldots)$$

B) - SECONDE PARTIE

APPLICATION DES METHODES VARIATIONNELLES A L'ETUDE D'UN PLASMA TOKAMAK

B.I - INTRODUCTION AU TOKAMAK

La voie Tokamak est, parmi les différentes filières envisagées vers le réacteur thermonucléaire, l'une des plus prometteuses dans le développement des recherches sur le confinement d'un plasma.

La configuration Tokamak appartient à la classe des configurations fermées pour lesquelles les lignes de champ magnétique ont une topologie toroïdale. Pour éviter une dérive des particules (ions et électrons) due à la courbure des lignes de champs on est amené à enrouler les lignes de champ magnétique en hélice sur des surfaces magnétiques toriques emboîtées les unes dans les autres autour de l'axe secondaire du tore ou "axe magnétique" (figure (6)).

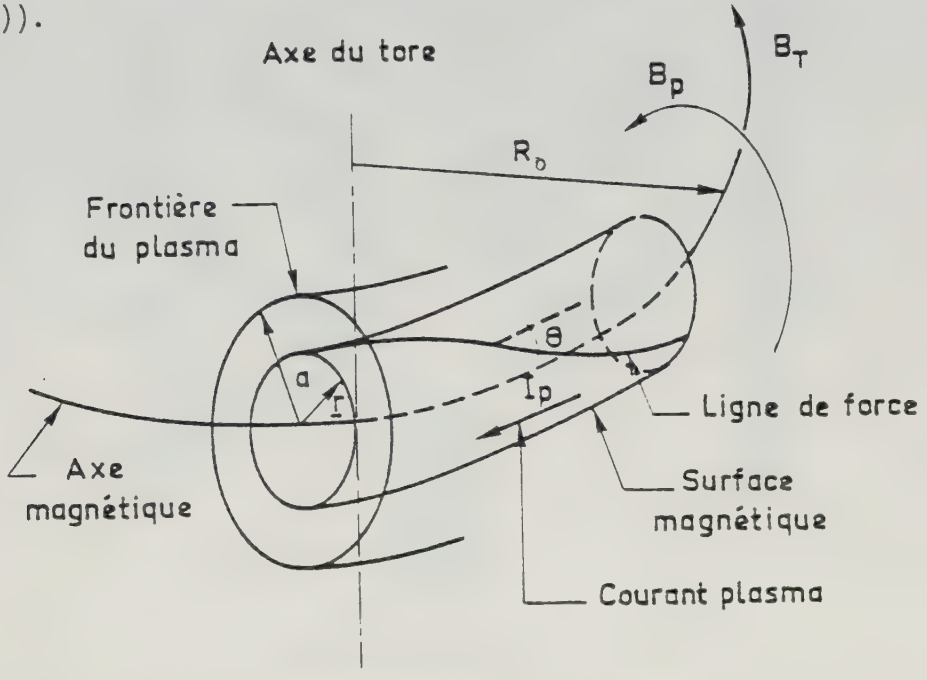


FIG. 6 : Schéma de principe d'une configuration magnétique fermée.

On obtient ainsi une compensation des mouvements de dérive des particules individuelles et celles-ci sont alors indéfiniment confinées au voisinage d'une surface magnétique. Cette structure en hélice des lignes de champ est obtenue en ajoutant une composante poloïdale B_θ au champ magnétique principal

B_φ. Dans une configuration Tokamak, cette composante poloïdale est créée par l'induction d'un courant toroïdal I_φ dans le plasma, ce courant I_φ présentant de plus l'avantage de chauffer le plasma par effet Joule.

Sur le plan pratique la machine peut-être assimilée très sommairement à un transformateur dont le secondaire, en court circuit, serait constitué par l'anneau de plasma. Le primaire, composé d'un ensemble de bobines (bobines poloïdales) couplées au secondaire par un circuit magnétique a pour rôle, non seulement d'induire le courant dans le plasma, mais aussi de créer un champ vertical (champ de fuite de transformateur) nécessaire à l'équilibre du plasma : le schéma de principe d'une machine Tokamak est donné sur la figure (7).

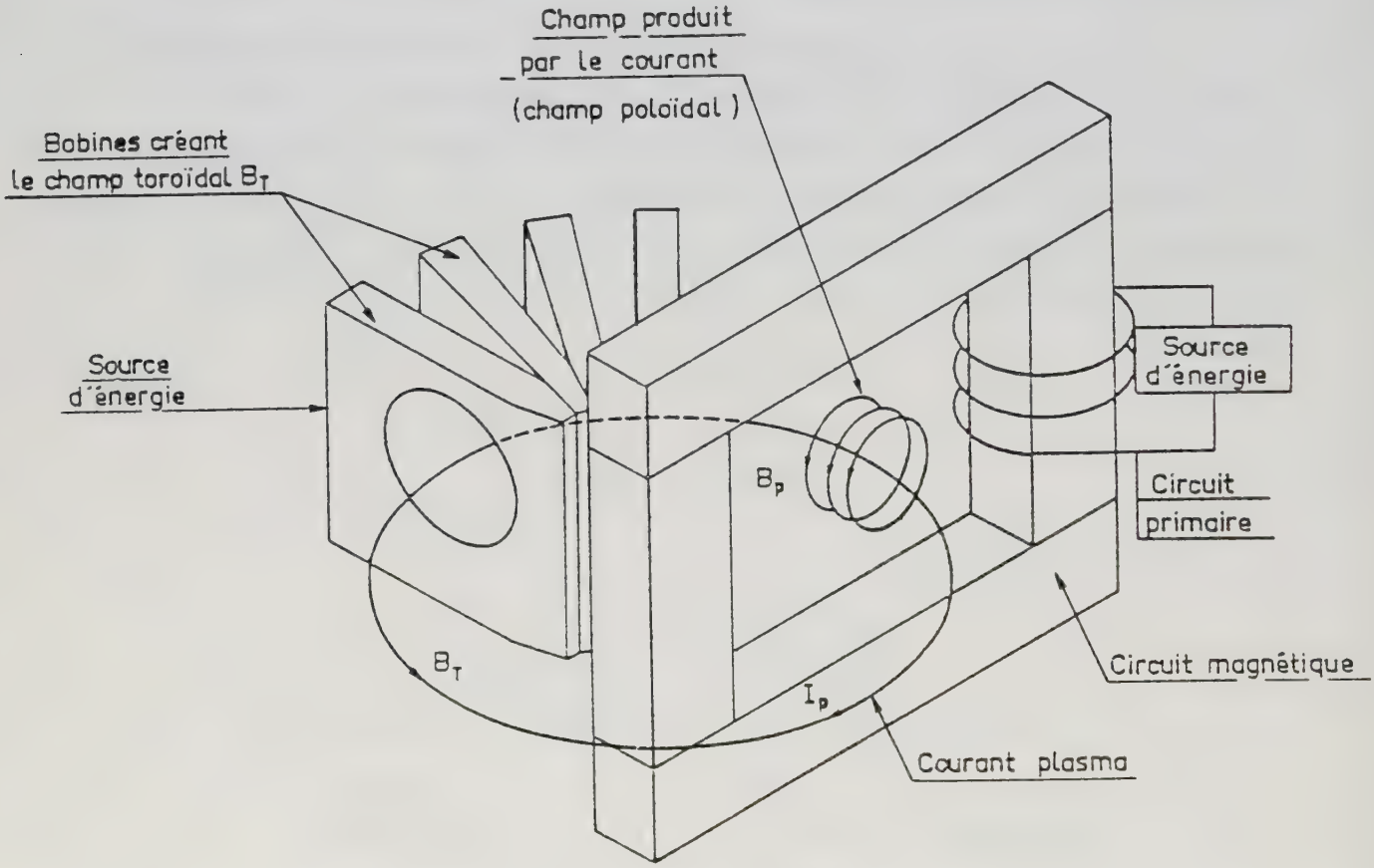


FIG. 7 : Principe du TOKAMAK.

Une description plus complète des Tokamaks peut-être trouvée dans [18] [19] [20]. La figure (8) représente un schéma éclaté du Tokamak de Fontenay-aux-Roses : on y voit apparaître tous les circuits énoncés ci-dessus. Dans la version T.F.R. 600, les caractéristiques et performances d'une telle machine sont :

Caractéristiques : Grand rayon R_0 = 98 cm
Petit rayon a = 20 cm
Courant plasma I = 400 kA
Champ toroïdal B_0 = 5 T

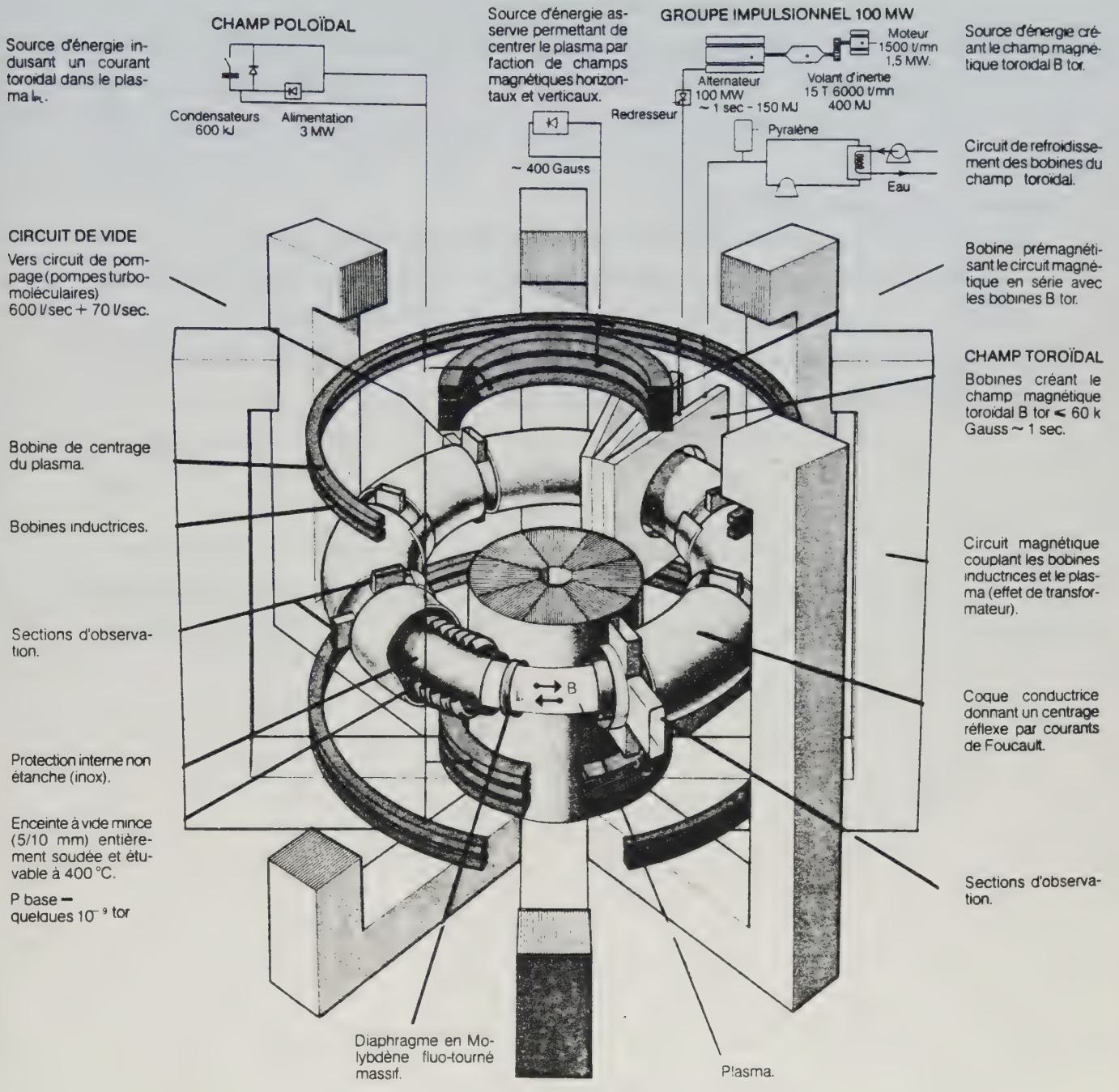


FIG. 8 : Schéma de principe T. F .R

Performances sur l'axe :

Densité électronique	$n_e(o) = 10^{14}$ électrons/cm^3
Température électronique	$T_e(o) = 1$ KeV (10^7 K)
Température ionique	$T_i(o) = 1$ KeV (en chauffage ohmique seul)
Pureté du plasma	$Z_{eff} = 1,1$

Grandeurs physiques remarquables :

Rayon de Larmor électronique	$\rho_{Le} = 5.10^{-3}$ cm
Rayon de Larmor ionique	$\rho_{Li} = 10^{-1}$ cm

Dans la configuration magnétique, les lignes de champ ont une "transformée rotationnelle" ι telle que :

$$\frac{1}{\iota} = q = \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r B_\varphi}{R B_\theta}$$

où q, l'inverse de la transformée rotationnelle, est appelé le facteur de sécurité, $d\varphi$ et $d\theta$ étant couplés sur une ligne de champ conformément aux notations de la figure (9). Les particules confinées (ions et électrons)

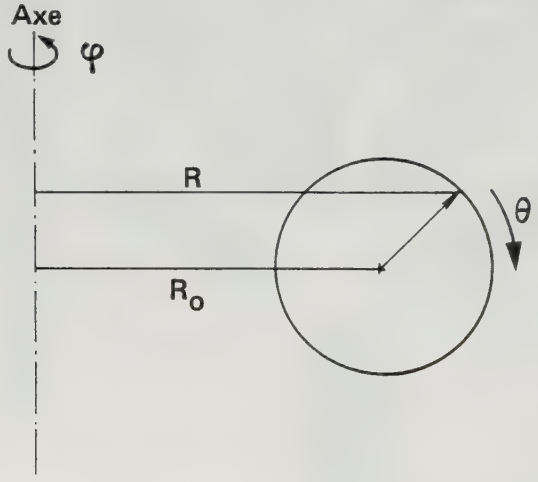


FIG. 9 : Géométrie du Tokamak.

ont une température T et une densité n a peu près constantes pour chaque assemblée sur chaque surface magnétique, et décroissantes du centre du bord. La densité de courant est elle aussi maximum au centre ce qui entraîne une dépendance radiale du facteur de sécurité, il vaut typiquement 1 au centre et entre 2 et 4 au bord pour les Tokamaks actuels ; q = 4 par exemple signifie qu'une ligne de force fait quatre grands tours autour de l'axe principal pour un petit tour autour de l'axe magnétique.

Les particules chargées (ions et électrons) peuvent être divisées en deux classes :

• les particules "circulantes" dont le centre guide suit les lignes de forces à $q\rho_{th}$ près, où ρ_{th} est le rayon de Larmor thermique ; la trajectoire de ces particules, projetée sur un plan méridien du tore à l'allure indiquée figure (10).

• les particules "piègées" qui ont une énergie parallèle aux lignes du champ insuffisante pour remonter le gradient de champ toroïdal en 1/R et qui sont réfléchies par effet de miroir magnétique. La condition de réflexion est $(v_{//}/v_{\perp})^2 < 2r/R$ partout sur la trajectoire ; la topologie des trajectoires de ces particules piègées est appelée "banane" par la forme de leur projection sur un plan méridien du tore (figure (11)).

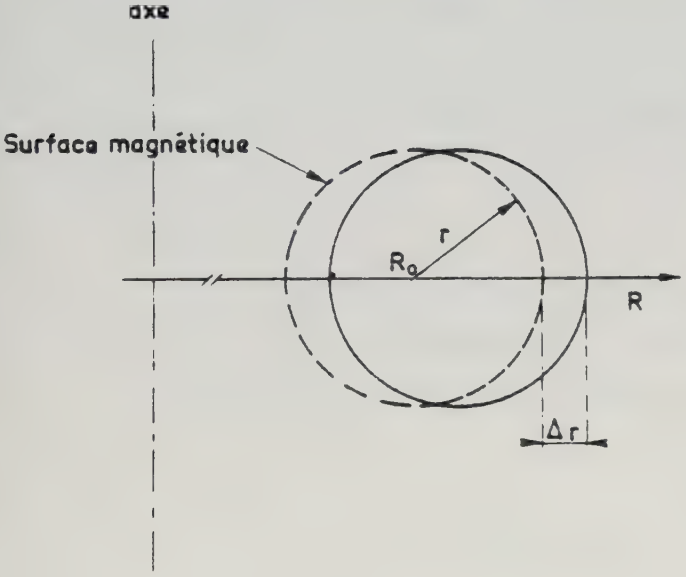


FIG. 10 : Trajectoire de particule circulante

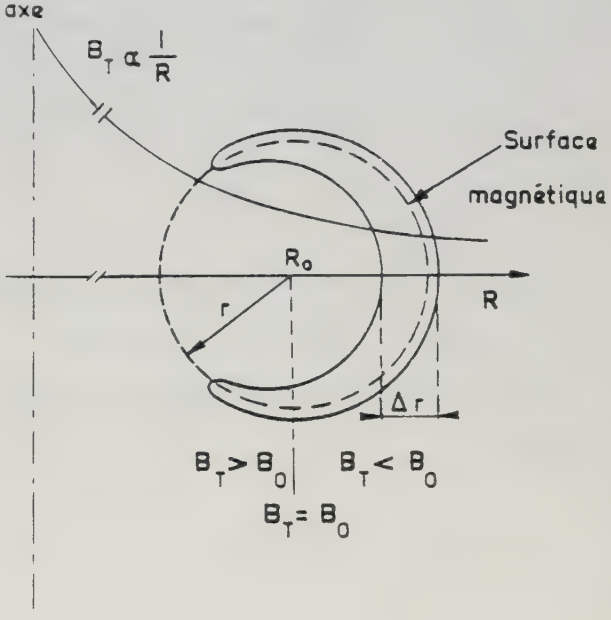


FIG. 11 : Trajectoire de particule piégée

Pour chacune de ces classes, on peut définir un système de variables angulaires et d'action permettant de décrire leur mouvement car celui-ci est quasi périodique au sens défini en (12). En effet dans un Tokamak, on peut avec une bonne précision, utiliser l'approximation du centre guide, c'est-à-dire décrire l'espace des phases $(\vec{x}, \vec{p})$ par les variables lentes :

$\vec{x}_g$ (coordonnées du centre guide G)

$\vec{v}_g = \frac{d\vec{x}_g}{dt}$

$\mu = \frac{1}{2} m \frac{v_\perp^2}{B} \simeq \frac{1}{2} m \frac{\omega_c^2 \rho_c^2}{B}$

(où $\rho_c(\vec{x},\vec{p})$ est le rayon de Larmor)
et la phase cyclotronique rapide $\varphi_c(\vec{x},\vec{p})$:

$$\vec{x} = \vec{x}_g + \vec{x}_c$$

$$\begin{cases} x_{c1} = \rho_c \cos\varphi_c \\ x_{c2} = \rho_c \sin\varphi_c \end{cases}$$

Pour les particules circulantes, les coordonnées de G varient au cours du temps comme :

$$r_g = r_o + f(\omega_2 t + \theta_o) \qquad f \propto q\rho_c$$

$$\theta_g = \omega_2 t + f'(\omega_2 t + \theta_o) + \theta_o \qquad f' \propto r/R$$

$$\varphi_g = \omega_3 t + f''(\omega_2 t + \theta_o) + \varphi_o \qquad f'' \propto q\, r/R$$

Les fonctions f , f' , f'' sont périodiques avec la période 2π et r_o, θ_o, φ_o, ω_2, ω_3 sont des constantes du mouvement. Les fonctions f', f'', tendent vers 0 avec le rapport d'aspect du Tokamak soit r/R et on obtient alors :

$$\phi_1 = \varphi_c \qquad J_1 = -\frac{m_\alpha c}{e_\alpha}\mu$$

$$\phi_2 = \theta\left(1 + \mathcal{O}((r/R)\cos\theta)\right) \qquad J_2 = \frac{e_\alpha}{2\pi c} f\left(\frac{2\pi c}{e_\alpha} J_3\right) + R_o m_\alpha v_{\parallel}\left(1 + \mathcal{O}(r^2/R^2)\right)$$

$$J_2 = \frac{e_\alpha}{2\pi c}\Psi_T + q\left(R_o m_\alpha v_{\parallel} - R m_\alpha v_\varphi\right)$$

$$\phi_3 = \varphi\left(1 + \mathcal{O}((r/R)\cos\theta)\right) \qquad J_3 = R p_\varphi = \frac{e_\alpha}{2\pi c}\Psi_p + R m_\alpha v_\varphi$$

où $m_\alpha(e_\alpha)$ est la masse (charge) des particules α , μ est le moment magnétique, $v_{\parallel}$ la composante de $\vec{v}$ selon $\vec{B}$; Ψ_T et Ψ_p sont les flux magnétiques toroïdal et poloïdal des champs $\vec{B}_\varphi$ et $\vec{B}_\theta$ à travers la surface magnétique décrite

par la particule (figures (10) et (11)) ; la fonction f est définie par $\Psi_T = f(\Psi_p)$ c'est-à-dire $f' = (d\Psi_T / d\Psi_p) = -q$ où q est le facteur de sureté. Nous pouvons noter que $J_2 \simeq (e_\alpha / 2\pi c)\,\Psi_T$ et $J_3 \simeq (e_\alpha / 2\pi c)\,\Psi_p$ avec une imprécision de l'ordre de $\rho_{l\alpha}/R$ où $\rho_{l\alpha}$ est le rayon de Larmor poloïdal des particules.

B.II - TRANSPORT NEOCLASSIQUE DANS UNE CONFIGURATION TOKAMAK

Le champ magnétique toroïdal d'un Tokamak est de la forme $B_\varphi = B_0 \left(1 - (r/R)\cos\theta\right)$ (cf. notations sur la figure 9), nous pouvons le considérer comme la somme d'un champ principal B_0 d'amplitude constante auquel est superposé une perturbation de champ $\delta B = -(r/R) B_0 \cos\theta \ll B_0$. En présence du champ principal B_0 et du champ poloïdal B_θ, le mouvement des particules d'espèce α le long des lignes de champs se fait à vitesse constante $v_{//} = (\vec{v}.\vec{B_0})/B_0$. Toutes les particules sont circulantes et leurs trajectoires ont une même topologie ; une telle situation est décrite par des coefficients de transport classiques en ρ_α^2/ν_c. C'est l'inhomogénéité du champ B_φ représenté par le terme δB qui sera alors responsable de l'augmentation des phénomènes de transport au sein du plasma, décrits alors par des coefficients dits néoclassiques.

1) Transport néoclassique des ions légers

Si maintenant on tient compte de la correction de champ δB, l'Hamiltonien de la particule α est, dans le repère où le champ électrique est nul :

$$\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},\vec{p},t) = H_\alpha(\vec{x},\vec{p},t) + \delta H$$

où

$$H_\alpha(\vec{x},\vec{p},t) = h(J,t,\alpha) = \mu B_0 + \frac{1}{2} m_\alpha v_{//}^2 - e_\alpha \Psi$$

où Ψ est le potentiel électrostatique, et les variables J, Φ relatives aux particules circulantes et, en négligeant des termes proportionnels à $\exp \pm i\varphi_c$ qui ne jouent aucun rôle :

$$\delta H = \mu (B_\varphi - B_0) = -\mu B_0 \frac{r}{R}\cos\theta = -\mu B_0 \frac{r}{R}\cos\Phi_2$$

la perturbation δH est bien de la forme (23) avec $\alpha(J) = -(e_\alpha B_0/m_\alpha c) \times (r/R) J_1$ et le triplet d'entiers (m_1^*, m_2^*, m_3^*) est donné par (0, 1, 0). Nous avons alors $\Omega = m_k^* (\partial h/\partial J_k) = v_{//}/qR$. La perturbation crée une surface de résonance $\Omega = 0$, soit $v_{//} = 0$ et une catégorie de particules dont la vitesse parallèle peut s'annuler, se sont les particules piègées ou bananes.

Une bonne approximation de la fonction de distribution de l'assemblée d'ions H en quasi équilibre thermodynamique sur chaque surface magnétique spécifiée par Ψ_p est donnée par :

$$\mathcal{F}_H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{n_H(\Psi_p, t) \exp - \frac{e_\alpha \Psi}{T}}{(2\pi m_H T_H(\Psi_p, t))^{3/2}} \exp - \frac{\mathcal{H}_H + e_\alpha \Psi}{T_H(\Psi_p, t)} \qquad (65)$$

où $n_H(\Psi_p, t)$ et $T_H(\Psi_p, t)$ sont la densité et la température sur la surface Ψ_p . Cette approximation suggère la forme de la fonction régulière $f_H(J, t)$ qui doit être une fonction de J. De manière à tenir compte du diamagnétisme dans la direction poloïdale et toroïdale nous pouvons choisir :

$$f_H(J, t) = \frac{\nu_H(J_2, J_3, h, t)}{(2\pi m_H \tau_H(J_3, t))^{3/2}} \exp - \frac{h_H(J, t)}{\tau_H(J_3, t)} \qquad (66)$$

où

$$\nu_H\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T, \frac{e}{2\pi c}\Psi_p, h, t\right) = n_H(\Psi_p, t) \exp - \frac{e_\alpha \Psi}{T}$$

$$\tau_H\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_p, t\right) = T_H(\Psi_p, t)$$

La fonction $U_H(J, t)$ définie par (26) et la fonction d'essai $\underline{U}_H(J)$ à l'instant t sont alors données par :

$$\begin{aligned} U_H(J, t) &= T\left(\text{Log}\, \nu_H(J_2, J_3, h, t) - \tfrac{3}{2} \text{Log}\, \tau_H(J_3, t) + h_H\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\tau_H(J_3, t)}\right)\right) \\ \underline{U}_H(J, t) &= T\left(\text{Log}\, \underline{\nu}_H(J_2, J_3, h) - \tfrac{3}{2} \text{Log}\, \underline{\tau}_H(J_3) + h\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\underline{\tau}_H(J_3, t)}\right)\right) \end{aligned} \qquad (67)$$

où les fonctions d'essai $\underline{\nu}_H$, $\underline{\tau}_H$ sont reliées aux fonctions d'essai $\underline{n}_H$, $\underline{T}_H$ par les relations :

$$\underline{\nu}_H\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T, \frac{e}{2\pi c}\Psi_p, h\right) = \underline{n}_H(\Psi_p)\exp - \frac{e\Psi}{T}$$
$$\underline{T}_H\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_p\right) = \underline{T}_H(\Psi_p) \qquad (68)$$

En développant $\underline{\nu}_H$ et $\underline{T}_H$ au premier ordre en $J_2 - \left(\frac{e}{2\pi c}\right)\Psi_T$, $J_3 - \left(\frac{e}{2\pi c}\right)\Psi_p$ nous obtenons :

$$\underline{U}_H = T\left\{\text{Log}\,\underline{n}_H(\Psi_p) - \tfrac{3}{2}\log \underline{T}_H(\Psi_p) + h\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\underline{T}_H}\right)\right\} + \underline{U}'_H(\vec{x},\vec{p})$$

$$U'_H(\vec{x},\vec{p}) = T\left\{R_0 m_H v_{//}\frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_3} + r m_H \cos\theta\left(\frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_3} v_{//} - q\frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_2} v_{//}\right)\right.$$
$$\left. -\left(\frac{3}{2} - \frac{h}{\underline{T}_H}\right)\frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial J_3} R m_H v_\varphi + \ldots\right\}$$

où nous avons identifié $v_{//}$ et v_φ ce qui est valable pour des valeurs de $q \gg 1$, ce que nous considèrerons ici. Le diamagnétisme de l'assemblée des ions H est ainsi rassemblé dans $\underline{U}'_H$.

Considérant les coefficients de transport dus aux collisions entre ions légers H, nous négligeons les collisions subies par les ions de la part des électrons dont l'effet est faible et ne tiendrons pas compte de la présence du champ électrique inductif dans le plasma à cause de l'inertie des ions considérés. Les conditions d'application du principe variationnel simplifié données précédemment sont vérifiées dans les régimes faiblement collisionnels où le libre parcours moyen des particules est plus grand que la largeur de connection $\lambda_{cH} > \pi q R$. Le calcul détaillé montre que la fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{W}}_b$ figurant dans (33) est négligeable, et l'évolution de la fonction $F_H(J,t)$ sera alors déterminé par l'extrémalisation en $\underline{U}_H$ au voisinage de U_H de la fonctionnelle :

$$\dot{\mathcal{W}}(\underline{U}) = \frac{2}{T}\iiint \frac{\partial F_H(J,t)}{\partial t}\,\underline{U}_H(J)(2\pi)^3 d_3 J + \dot{S}(\underline{U}_H(J)) + \delta\dot{\mathcal{W}}_R(\underline{U}_H(J))$$

qui se met sous la forme, après quelques intégrations dans le premier terme :

$$\dot{\mathcal{M}}(\underline{U}) = 2\int \cdots \left(\frac{\partial m_H}{m_H \partial t} + \left(\frac{h}{T_H} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial T_H}{T_H \partial t} \right) \left(\operatorname{Log} \underline{y}_H - \frac{3}{2} \operatorname{Log} \underline{T}_H + h\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\underline{T}_H} \right) \right) f_H(J,t)\, d_3J d_3\phi$$
$$+ \dot{S}(\underline{U}'_H) + \delta \dot{\mathcal{M}}_R(\underline{U}_H) \qquad (69)$$

$$\delta \dot{\mathcal{M}}_R(\underline{U}_H) = \iiint \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \underline{U}_H}{\partial J_2} \right) I(J)\ \delta(\Omega)\ f_H(J,t)\ (2\pi)^3\, d_3 J$$

avec : $I(J) = (\pi/2)(r/R)^2 (m_H v_\perp^2/2)^2$ si $qR < \lambda_{cH} < qR(R/r)^{3/2}$

$I(J) = (1{,}38)(r/R)^{1/2} (m_H^4 v_\perp^2/2)^{1/2} q R_0 \langle \delta v_{\parallel}^2 \rangle$ si $\lambda_{cH} > qR(R/r)^{3/2}$

où $v_\perp^2 = v^2 - v_{\parallel}^2$ et $\langle \delta v_{\parallel}^2 \rangle$ est le coefficient de diffusion de donné par Spitzer [ ] . Notons que pour $\underline{m}_H$ et $\underline{T}_H$ fixés, seule la fonctionnelle $\dot{S}(\underline{U}'_H)$ contient des termes d'ordre zéro en (r/R), nous commençons donc par extrémaliser $\dot{S}(\underline{U}'_H)$ ce qui donne :

$$\frac{\partial \underline{y}_H}{\underline{y}_H \partial J_3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{h}{\underline{T}_H} \right) \frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial J_3} = \underline{C}(\Psi_p) \qquad (70)$$

La valeur extremum de $\dot{S}(\underline{U}'_H)$ est alors nulle. Utilisant les équations (68) dont les dérivées donnent

$$\frac{\partial \underline{y}_H}{\underline{y}_H \partial J_3} + \left(-\frac{1}{q} \right) \frac{\partial \underline{y}_H}{\underline{y}_H \partial J_2} = \frac{\partial \underline{m}_H}{\underline{m}_H \partial J_3} - \frac{e}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial J_3}$$

$$\frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial J_3} = \frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial J_3}$$

nous obtenons en introduisant $\underline{C}(\Psi_p)$

$$-\frac{1}{q} \frac{\partial \underline{y}_H}{\underline{y}_H \partial J_2} = \frac{2\pi c}{e} \left(\frac{\partial \underline{m}_H}{\underline{m}_H \partial \Psi_p} - \frac{e}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_p} \right) + \left(\frac{h}{\underline{T}_H} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial J_3} - \underline{C}(\Psi_p)$$

ce qui donne dans la fonctionnelle $\delta \dot{\mathcal{M}}_R(\underline{U}_H)$:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial J_2} = \frac{\partial \chi_H}{\chi_H \partial J_2} = -q\left\{\frac{2\pi c}{e}\left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial \psi_p} - \frac{e}{T_+}\frac{\partial \psi}{\partial \psi_p}\right) + \left(\frac{h}{T_H} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T_H}{T_H \partial J_3} - \frac{C}{}(\psi_p)\right\}$$

Pour calculer plus explicitement cette fonctionnelle nous pouvons revenir aux variables naturelles de la configuration toroïdale :

$$dJ_3 = \left(\frac{e}{2\pi c}\right) d\psi_p = \left(\frac{e}{2\pi c}\right)\left(-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{B_0}{2\pi R}\right) dV$$

(où dV est l'élément de volume compris entre deux surfaces magnétiques voisines) ce qui donne :

$$\delta \dot{dW}_R = \int \left(\frac{2\pi c}{e}\right)^2 \left(\frac{2\pi R}{B_0}\right)^2 q^4 \left\{\frac{\partial n_H}{n_H \partial V} - \frac{e}{T}\frac{\partial \psi}{\partial V} + \left(\frac{h}{T_H} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T_H}{T_H \partial V} + \frac{C(V)}{q}\left(\frac{e}{2\pi c}\right)\frac{B_0}{2\pi R}\right\}^2$$

$$\times I(v^2)\ \delta(\Omega)\ f_H(J,t)\ 2\pi\, v_\perp dv_\perp dv_{//}\ dV$$

On obtient alors deux expressions possibles de $\delta \dot{dW}_R$:

a) En régime Plateau où $\nu_{HH} > \nu_{th,H}\,(r/R)^{3/2}/qR$:

$$\delta \dot{dW}_R^P = \int \ldots \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2\pi)^4}{2}\left(\frac{c\,T_H}{e\,B_0}\right)^2 R^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{n_H q R m_H}{T_H \nu_{HH}}^{1/2}\left\{\frac{\partial n_H}{n_H \partial V} - \frac{e}{T}\frac{\partial \psi}{\partial V} + \left(\frac{e B_0}{4\pi^2 R c}\right)\frac{C}{q}\right.$$

$$\left. + \left(x - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T \partial V}\right\}^2 x^2 \exp - x^2\, dx\, dV$$

où $\nu_{HH} = \dfrac{4\sqrt{2\pi}\, n_H e^4 \log \Lambda}{3\, m_H^{1/2}\, T_H^{3/2}}$ est la fréquence de collision ion-ion, $\nu_{th,H} = (2T_H/m_H)^{1/2}$;

b) En régime Banane où $\nu_{HH} < \nu_{th,H}\,(r/R)^{3/2}/qR$:

$$\delta \dot{dW}_R^B = \int \ldots 1{,}46\,(2\pi)^4 \left(\frac{c\,T_H}{e\,B_0}\right)^2 R^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} \frac{n_H (qR)^2 m_H}{T_H}\nu_{HH}\left\{\frac{\partial n_H}{n_H \partial V} - \frac{e}{T}\frac{\partial \psi}{\partial V} + \left(\frac{e B_0}{4\pi^2 R c}\right)\frac{C}{q}\right.$$

$$\left. + \left(x - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T \partial V}\right\}^2 \left(\Phi(x) - G(x)\right) \exp - x^2\, dx^3\, dV$$

où $\phi(x)$ et $G(x)$ sont les fonctions de Spitzer [21] .

En utilisant ces expressions de $\delta\dot{\mathcal{U}}_R$ nous pouvons poursuivre la minimisation de la fonctionnelle $\dot{\mathcal{U}}$ qui ne comporte plus que les termes $\dot{\Sigma}$ et $\delta\dot{\mathcal{U}}_R$. La minimisation par rapport à la constante C introduite, détermine sa valeur en fonction du potentiel Ψ ; C apparaît ainsi comme la vitesse de rotation du plasma dans le repère où le champ électrostatique est nul. Du même coup on a effectué la minimisation de $\dot{\mathcal{U}}$ par rapport à Ψ et la valeur du potentiel électrostatique Ψ assure l'ambipolarité du flux de particules.Nous obtenons :

a) En régime Plateau : $$\delta\dot{\mathcal{U}}_R = \iiint 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2\pi)^4\left(\frac{c\,T_H}{e\,B_0}\right)^2 r^2\,\frac{m_H q R\, m_H^{1/2}}{T_H^{1/2}}\left(\frac{\partial I_H}{I_H \partial V}\right)^2 dV$$

b) En régime Banane : $$\delta\dot{\mathcal{U}}_R = \iiint 0{,}95\,(2\pi)^4\left(\frac{c\,T_H}{e\,B_0}\right)^2 R^2 (qR)^2\,\frac{m_H m_n \nu_{HH}}{T}\sqrt{\frac{r}{R}}\left(\frac{\partial I_H}{I_H \partial V}\right)^2 dV$$

Par minimisation de $\dot{\mathcal{U}}$ par rapport à $\mathrm{Log}\, n_H$, nous obtenons un flux de particule nul car les électrons ont été négligés. La minimisation de $\dot{\mathcal{U}}$ par rapport à $\mathrm{Log}\, T_H$ aboutit à une équation de la forme

$$\frac{3}{2} n_H \frac{\partial T_H}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi_i\, n_H \frac{\partial T_H}{\partial r}\right) \qquad (71)$$

où χ_i ($cm^2 s^{-1}$) est le coefficient de conduction ionique de la chaleur. On obtient alors les valeurs bien connues [22] de ces coefficient néoclassiques :

$$\chi_i^P = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(qR)\left(\frac{m_H}{T_H}\right)^{1/2}\left(\frac{c\,T_H}{e\,B_0 R}\right)^2$$

$$\chi_i^B = 0{,}95\,\frac{q^2 R^2}{(r/R)^{3/2}}\,\frac{m_H \nu_{HH}}{T_H}\left(\frac{c\,T_H}{e\,B_0 R}\right)^2$$

Notons qu'en utilisant la généralisation du coefficient $I(\Delta, J)$ de l'équation (36), donnée dans le paragraphe A.III, nous obtenons les coefficients ioniques de transmission de chaleur pour un plasma de section non circulaire. Il suffit de remplacer r(rayon de la surface magnétique torique) par la demi largeur (comptée sur la direction horizontale) des surfaces magnétiques de la configuration non circulaire, et,dans le régime banane, de remplacer le coefficient 0.95 par $\theta/\sqrt{2}$ où θ est encore donné par :

$$\Theta = 2^{3/2}\pi \lim_{w\to\infty}\left\{\frac{w}{K(w)} - \int_1^{\infty}\frac{dw}{2K(w)}\right\}$$

avec ici :

$$K(w) = \int_{-qR}^{+qR}\left(w - \frac{B(l)-B_0}{B_{max}-B_0}\right)^{1/2}\frac{dl}{qR}$$

l étant la coordonnée le long d'une ligne de force, B_0 le champ toroïdal sur l'axe magnétique et B_{max} la valeur du champ toroïdal, sur la surface magnétique englobant tout le plasma, prise en $\theta = \pi$.

2) Transport néoclassique des ions légers et des impuretés

Nous incluons dans note étude les impuretés ($\alpha = Z$) de charge Ze et ne considèrerons que les collisions ioniques. Nous négligerons encore les électrons et ne tiendrons donc pas compte du champ électrique inductif dans le plasma. Nous nous intéresserons tout d'abord au cas où chaque assemblée est en régime faiblement collisionnel, auquel cas les conditions d'application du principe variationnel simplifié sont satisfaites et la fonctionnelle $\delta\dot{W}_b$ est négligeable.

a) Impuretés dans un régime faiblement collisionnel

Nous choisirons des fonctions de distribution et des fonctions d'essai analogues à celles utilisées précédemment en les affectant de l'indice $\alpha = H$ pour l'assemblée des ions légers où de l'indice $\alpha = Z$ pour les assemblées d'impuretés. L'évolution des fonctions de distributions $f_\alpha(J,t)$ sera alors déterminé par l'extrèmalisation en $\underline{U}_\alpha$ au voisinage de U_α de la fonctionnelle :

$$\dot{W}(\underline{U}) = \sum_\alpha\left\{2\int\cdots\left(\frac{\partial m_\alpha}{m_\alpha\partial t} + \left(\frac{h}{T_\alpha} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T_\alpha}{T_\alpha\partial t}\right)\left(\log\underline{\nu}_\alpha - \frac{3}{2}\log\underline{\tau}_\alpha + h\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\underline{\tau}_\alpha}\right)\right)\right.$$

$$\left.\times f_\alpha(J,t)\,d_3J\,d_3\phi \quad + \delta\dot{W}_R(\underline{U}_\alpha)\right\} + \dot{S}(\underline{U}'_\alpha)$$

où $\delta\dot{W}_R(\underline{U}_\alpha)$ est analogue à $\delta\dot{W}_R(\underline{U}_M)$ donné par (69) recalculée dans les différents domaines de collisionalité pour chaque assemblée α .

Nous commençons de même par extrêmaliser d'abord $\dot{S}(\underline{U}'_\alpha)$ et en supposant $T_H = T_Z$ nous obtenons des équations :

$$\frac{\partial \underline{Y}_\alpha}{\underline{Y}_\alpha \partial J_3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{h}{\underline{T}_\alpha}\right) \frac{\partial \underline{T}_\alpha}{\underline{T}_\alpha \partial J_3} = \underline{C}(\Psi_p) \tag{72}$$

où la constante $\underline{C}(\Psi_p)$ est indépendante de α . (Cette relation appliquée à $\underline{Y}_\alpha = Y_\alpha$ et $\underline{T}_\alpha = T_\alpha$ exprime que la vitesse toroïdale moyenne est la même pour toutes les assemblées). La valeur extremum de $\dot{S}(\underline{U}'_\alpha)$ est alors négligeable. Utilisant la constante $\underline{C}(\Psi_p)$ et revenant aux variables naturelles de la configuration toroïdale nous obtenons les expressions de $\delta\dot{W}_R(\underline{U}_\alpha)$ sous la forme :

$$\delta\dot{W}_R(\underline{U}_\alpha) = \int\cdots\left(\frac{2\pi c}{e_\alpha}\right)^2\left(\frac{2\pi R}{B_0}\right)^2 q^4 \left\{\frac{\partial \underline{n}_\alpha}{\underline{n}_\alpha \partial V} - \frac{e_\alpha}{T}\frac{\partial \Psi}{\partial V} + \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial \underline{T}_\alpha}{\underline{T}_\alpha \partial V} + \frac{\underline{C}(V)}{q}\left(\frac{e_\alpha B}{4\pi^2 R c}\right)\right\}^2$$

$$\times \underline{T}_\alpha(v^2)\,\delta(\Omega)\,F_\alpha(J,t)\,2\pi\, v_\perp\, dv_\perp\, dv_{//}\, dV$$

En utilisant ces expression de $\delta\dot{W}_R$ nous pouvons poursuivre la minimisation de la fonctionnelle $\dot{W}$. La minimisation par rapport à $\underline{C}$ donne la valeur de C , vitesse de rotation du plasma dans le repère où le champ électrostatique est nul et simplifie l'expression de la fonctionnelle $\delta\dot{W}_R(\underline{U}_\alpha)$. Pour cela nous introduisons les fonctions :

$$\left(\frac{2\pi c}{q e_\alpha}\right)^2 \iiint F_\alpha(J,t)\,\delta(\Omega)\,\underline{T}_\alpha(v^2)\,d_3v = \mathcal{Z}_\alpha(V)$$

$$\left(\frac{2\pi c}{q e_\alpha}\right)^2 \iiint F_\alpha(J,t)\,\delta(\Omega)\,\underline{T}_\alpha(v^2)\left(\frac{h}{T_\alpha} - \frac{3}{2}\right)d_3v = \mathcal{Z}'_\alpha(V) \tag{73}$$

$$\left(\frac{2\pi c}{q e_\alpha}\right)^2 \iiint F_\alpha(J,t)\,\delta(\Omega)\,\underline{T}_\alpha(v^2)\left(\frac{h}{T_\alpha} - \frac{3}{2}\right)^2 d_3v = \mathcal{Z}''_\alpha(V)$$

et la fonctionnelle $\delta\dot{W}_R(\underline{U}_\alpha)$ s'écrit alors :

$$\delta \dot{W}_R(\underline{U}_\alpha) = \int \cdots \left(\frac{dV}{d\Psi_p}\right)^2 q^2 \left\{ \frac{\partial \underline{n}_\alpha}{\underline{n}_\alpha \partial V} - \frac{e_\alpha}{T}\frac{\partial \Psi}{\partial V} + \left(\frac{h}{T_\alpha} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T_\alpha}{T_\alpha \partial V} \right.$$

$$\left. - \frac{e_\alpha}{\sum_i e_i Z_i} \left(\sum_i Z_i \frac{\partial \underline{n}_i}{\underline{n}_i \partial V} + \sum_i \frac{e_i Z_i}{T}\frac{\partial \Psi}{\partial V} + \sum_i Z'_i \frac{\partial T_i}{T_i \partial V} \right) \right\}^2$$

$$I_\alpha(v^2)\, \delta(\Omega)\, f_\alpha(J,t)\, d_3 v\, dV$$

En extremalisant la fonctionnelle $\dot{W}(\underline{U})$ par rapport à $\mathrm{Log}\ \underline{n}_\alpha$ nous obtenons pour chaque espèce α une équation de diffusion de la forme

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi_{n\alpha}}{\partial r}$$

où $\Phi_{n\alpha}$ est le flux radial de particules par unité de surface de l'espèce α :

$$\Phi_{n\alpha} = - \left(\frac{\partial r}{\partial \Psi_p}\right)^2 \frac{e_\alpha Z_\alpha \left(\sum_{\beta\neq\alpha} e_\beta^2 Z_\beta\right)}{\sum_i Z_i e_i^2} \left\{ \left(\frac{\partial n_\alpha}{e_\alpha n_\alpha \partial r} - \frac{1}{\sum_{\beta\neq\alpha} Z_\beta e_\beta^2} \sum_{\beta\neq\alpha} \frac{e_\beta Z_\beta}{n_\beta}\left(\frac{\partial n_\beta}{\partial r}\right)\right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{Z'_\alpha}{Z_\alpha}\frac{\partial T_\alpha}{e_\alpha T_\alpha \partial r} - \frac{1}{\sum_{\beta\neq\alpha} Z_\beta e_\beta^2} \sum_{\beta\neq\alpha} \frac{e_\beta Z'_\beta}{T_\beta}\left(\frac{\partial T_\beta}{\partial r}\right)\right) \right\}$$

Ce résultat général prend les formes suivantes dans deux cas particuliers d'intérêt pratique, en présence d'une seule espèce d'impureté :

i) Pour des ions légers dans le régime "banane" $(\lambda_{cH} > qR(R/r)^{3/2})$ et des ions impuretés dans le régime "plateau" $(qR < \lambda_{cz} < qR(R/r)^{3/2})$ et en prenant le cas où $Z_{eff} = n_z Z^2/n_H$ est grand, c'est-à-dire en ne tenant compte que des collisions Hydrogène-impureté et impureté-impureté, nous obtenons :

$$\Phi_{nH} = - Z\, \Phi_{nz} = - 0{,}95\, \frac{n_H \rho_{tk,H}^2}{\tau_{Hz}}\, q^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{1}{Z}\frac{\partial n_z}{n_z \partial r} - \frac{1}{i}\left(1 + \frac{3}{Z}\right)\frac{\partial T}{T \partial r} \right)$$

où $$\tau_{Hz}^{-1} = \frac{4\sqrt{2\pi}\, n_z Z^2 e^4 \log \Lambda}{3\, m_H^{1/2}\, T^{3/2}} \quad , \quad \rho_{tk,H}^2 = \frac{2T}{m_H}\left(\frac{m_H^2 c^2}{e^2 B_0^2}\right).$$

ii) Pour des assemblées d'ions légers et d'ions impuretés toutes deux en régime banane et dans le cas où $Z_{eff} = n_z Z^2/n_H$ est grand, le flux devient :

$$\Phi_{nH} = -Z\,\Phi_{nz} = -0{,}95\ \frac{m_H \rho_{th,H}^2}{\tau_{Hz}}\, q^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2}\left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{1}{Z}\frac{\partial n_z}{n_z \partial r} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0{,}2}{Z}\right)\frac{\partial T}{T \partial r}\right)$$

Ces résultats étant en accord avec [22] .

Nous obtenons de même, en extremalisant $d\dot{W}(\underline{U})$ par rapport à $\log T_\alpha$, une équation de la forme :

$$\frac{\partial\left(\frac{3}{2} n_\alpha T_\alpha\right)}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_{E\alpha}}{\partial r}$$

où $\Phi_{E\alpha}$ est le flux d'énergie radial transporté par les particules d'espèce α :

$$\Phi_{E\alpha} = -\left(\frac{dr}{d\psi_p}\right)^2 \frac{e_\alpha T_\alpha \left(\frac{3}{2} Z_\alpha + Z'_\alpha\right) \sum_{\beta \neq \alpha} e_\beta^2 Z_\beta}{\sum_i Z_i e_i^2} \left\{ \left(\frac{\partial n_\alpha}{e_\alpha n_\alpha \partial r} - \frac{1}{\sum_{\beta \neq \alpha} Z_\beta e_\beta^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{e_\beta Z_\beta}{n_\beta}\left(\frac{\partial n_\beta}{\partial r}\right)\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\frac{3}{2} Z'_\alpha + Z''_\alpha}{\frac{3}{2} Z_\alpha + Z'_\alpha} \left(\frac{\partial T_\alpha}{e_\alpha T_\alpha \partial r}\right) - \frac{1}{\sum_{\beta \neq \alpha} Z_\beta e_\beta^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{e_\beta Z'_\beta}{T_\beta}\left(\frac{\partial T_\beta}{\partial r}\right)\right)\right\}$$

En se limitant aux deux cas particuliers examinés à l'instant, nous obtenons :

i) Régime faiblement collisionnel mixte (H-Banane, Z-Plateau)

$$\Phi_{EH} = -0{,}95\ \frac{m_H T \rho_{th,H}^2}{\tau_{Hz}}\, q^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2}\left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{1}{Z}\frac{\partial n_z}{n_z \partial r} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{Z}\right)\frac{\partial T}{T \partial r}\right)$$

ii) Régime collisionnel banane pour les deux assemblées

$$\Phi_{EH} = -0{,}95\ \frac{m_H T \rho_{th,H}^2}{\tau_{Hz}}\, q^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2}\left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{1}{Z}\frac{\partial n_z}{n_z \partial r} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{0{,}2}{Z}\right)\frac{\partial T}{T \partial r}\right)$$

b) Impuretés dans un régime collisionnel

Si maintenant nous étudions la situation où les ions impuretés sont en régime collisionnel, ou de Pfirsch-Schlüter, pour lequel $\lambda_{cz} < qR$, tandis que les ions légers restent en régime faiblement collisionnel avec $\lambda_{cH} > qR$, l'expression de la fonctionnelle $d\dot{W}(\underline{U})$ simplifiée par l'uti-

lisation des variables régulières $f(J,t)$, $U(J,t)$ et $\underline{U}(J,t)$ n'est valable que pour les ions légers et $d\dot{W}(U)$ se met alors sous la forme :

$$d\dot{W}(\underline{U}) = \frac{2}{T}\iiint \frac{\partial f_M(J,t)}{\partial t}\, \underline{U}_M(J)(2\pi)^3 d_3J + \frac{2}{T}\int\cdots \frac{d\mathcal{F}_2(\vec{x},\vec{p},t)}{dt}\, \underline{U}_2(\vec{x},\vec{p},t)\, d_3x\, d_3p$$

$$+ \dot{S}(\underline{U}_M(J), \underline{U}_2(\vec{x},\vec{p},t)) + \delta d\dot{W}(\underline{U}_M(J))$$

où les fonctions $f_M(J,t)$ et $U_M(J,t)$ sont celles qui ont déjà été utilisées jusqu'à présent.

Pour tenir compte du caractère fluide de l'assemblée d'impureté nous prendrons la fonction $\mathcal{F}_2(\vec{x},\vec{p},t)$ sous la forme d'une Maxwellienne décalée :

$$f_2 = n_2(r)\ \exp - \frac{m_2(\vec{v}_2 - \vec{\bar{v}})^2}{2T}$$

Pour simplifier nous négligerons le gradient de température pour les ions impuretés, il apparaît en effet dans les expressions des coefficients de transport avec un facteur 1/Z et joue en général un rôle mineur dans le transport. La variable U_2 a donc la forme :

$$U_2 = T \log n_2 - m_2 \vec{v}_2 . \vec{\bar{v}}$$

En écrivant alors que la vitesse moyenne $\vec{\bar{v}}$ peut être décomposée en une composante parallèle à $\vec{B}$ et une composante, due au diamagnétisme, parallèle à l'axe magnétique :

$$\vec{\bar{v}} = \alpha \vec{B} + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial n_2}{n_2 \partial r} \cdot \frac{1}{B_\theta} \cdot \frac{cT}{Ze} \right)$$

L'équation de continuité de l'assemblée des impuretés permet de prendre $\alpha = Cte$ pour toutes les particules, nous écrivons alors $\alpha \vec{B} = v_0\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right)\frac{\vec{B}}{B}$. En confondant comme d'habitude la direction de $\vec{B}$ avec la direction $\vec{e}_\varphi$ nous pouvons alors prendre la variable U_2 et la variable test $\underline{U}_2$ sous la forme :

$$U_2 = m_2 v_{//}\left(v_0(\Psi_p,t)\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right) + TR\left(\frac{2\pi c}{e}\right)\frac{\partial n_2}{2n_2 \partial \Psi_p}\right) + T\left(\log n_2(\Psi_p,t)\right)$$

$$\underline{U}_2 = m_2 v_{//}\left(\underline{v}_0(\Psi_p)\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right) + TR\left(\frac{2\pi c}{e}\right)\frac{\partial \underline{n}_2}{2\underline{n}_2 \partial \Psi_p}\right) + T\left(\log \underline{n}_2(\Psi_p)\right)$$

où v_0 est ainsi défini comme la vitesse moyenne de l'assemblée Z autour de l'axe principal du tore. La fonctionnelle $\dot{W}(\underline{U})$ s'écrit alors :

$$\dot{W}(\underline{U}) = 2\int\ldots\left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial t} + \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T\partial t}\right)\left(\log \underline{\nu}_H - \frac{3}{2}\log \underline{T} + h\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\underline{T}}\right)\right) F_H(J,t)\, d_3\phi\, d_3 J$$

$$+ 2\int\ldots \frac{\partial n_z}{n_z \partial t} \log \underline{n}_z\, f_z(J,t)\, d_3\phi\, d_3 J + \dot{S}(\underline{U}) + \delta\dot{W}_R(\underline{U}_H) + \delta\dot{W}_b(\underline{U}_H) \qquad (74)$$

avec

$$\dot{S}(\underline{U}) = \frac{1}{T^2}\int\ldots X_{III}(H,Z)\, f_z\, F_H \left\{ TR\left(\frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_3} + \frac{\partial \underline{T}}{\underline{T}\partial J_3}\left(\frac{h}{\underline{T}} - \frac{3}{2}\right) - q\frac{r}{R}\cos\theta \frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_2}\right)\right.$$

$$\left. - v_0\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right) - TR\frac{\partial \underline{n}_z}{z\,\underline{n}_z \partial J_3}\right\}^2 d_3 x\, d_3 v_H\, d_3 v_z$$

$$\delta\dot{W}_R(\underline{U}) = \iiint \left(\frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_2}\right)^2 I_H(J)\, \delta(\Omega)\, F_H(J,t)\,(2\pi)^3\, d_3 J$$

et $X_{III}(H,Z)$ est donné par (4) :

$$X_{III}(H,Z) = 2\pi Z^2 e^4 \log\Lambda \frac{w_\perp^2}{w^3} \quad ; \quad \vec{w} = \vec{v}_H - \vec{v}_z$$

Seule la fonctionnelle $\dot{S}(\underline{U})$ contient des termes d'ordre 0 en r/R, nous commençons donc par minimiser cette fonctionnelle par rapport à $\underline{v}_0$, ceci donne la valeur de v_0 :

$$\frac{v_0}{RT} = -\left(\frac{2\pi c}{qe}\right)\left[\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \Psi_p} - \frac{1}{Z}\frac{\partial \underline{n}_z}{\underline{n}_z \partial \Psi_p} + A\frac{\partial \underline{T}}{\underline{T}\partial \Psi_p}\right]$$

où A est une constante qui vaut - (1/2) ou 3/2 lorsque les ions légers sont dans le régime de collisionnalité banane ou plateau respectivement. La valeur résiduelle de $\dot{S}$ est d'ordre 2 en (r/R) c'est-à-dire d'un ordre inférieur à $\delta\dot{W}_R$. Nous minimisons donc $\delta\dot{W}_R$ par rapport à $\underline{\nu}_H(J_2, J_3, h)$ et obtenons :

$$\frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_2} = \left(\frac{2\pi c}{qe}\right)\frac{\partial \underline{T}}{\underline{T}\partial \Psi_p}\left(A - \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2}\right)\right)$$

et les valeurs résiduelles des deux fonctionnelles $\dot{S}(\underline{U})$ et $\delta\dot{W}_R$ sont :

$$\delta\dot{W}_R(\underline{U}) = \iiint \left(\frac{2\pi c}{qe}\right)^2\left(\frac{\partial \underline{T}}{\underline{T}\partial \Psi_p}\right)^2\left(A - \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2}\right)\right)^2 I_H(J)\, \delta(\Omega)\, F_H(J,t)\,(2\pi)^3\, d_3 J$$

$$\dot{S}(\underline{u}) = \frac{1}{2T^2}\int\cdots\left(\frac{2\pi c}{qe}\right)^2 X_{M\parallel}(H,Z)(TR)^2\left(\frac{r}{R}\right)^2\Big[2\left(\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial\Psi_p} - \frac{\partial \underline{n}_2}{Z\underline{n}_2\partial\Psi_p}\right)$$

$$+\left(A - \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2}\right)\right)\frac{\partial T}{\underline{T}\partial\Psi_p}\Big]^2 F_2(\vec{x},\vec{p},t)\, F_H(\vec{x},\vec{p},t)\, d_3x\, d_3v_2\, d_3v_H$$

Nous remarquons que $\delta\dot{\mathcal{M}}_R(\underline{U})$ ne dépend pas de la densité $\underline{n}_H(\Psi_p)$, il ne produira donc pas de terme dans le calcul de $(\partial n_H/\partial t)$ obtenu par minimisation de $\dot{\mathcal{M}}(\underline{U})$ par rapport à $\underline{n}_H$, il peut donc être négligé lors du calcul des flux de particule mais il restera dominant dans les calculs de flux d'énergie. On est donc obligé, pour le calcul des flux de faire intervenir la fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{M}}_b$ donné par (37) qui ne peut plus être négligée. En partant de l'expression (37) et après quelques intégrations par partie, la fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{M}}_b$ peut se mettre sous la forme :

$$\delta\dot{\mathcal{M}}_b = -\frac{4}{T^2}\int\cdots K_{\parallel}\left(\frac{\partial \underline{U}_H}{m_H\partial v_H} - \frac{\partial \underline{U}_2}{m_2\partial v_H}\right)\left(\frac{\partial \underline{U}_H}{\partial J_2}\,\frac{\Delta\cos\theta}{\Omega}\right)F_H(\vec{x},\vec{p})\, d_3x\, dv_{\parallel}$$

où on a introduit la notation :

$$K_{\parallel} = \int\cdots\left[\frac{\partial X_{M\delta}}{\partial p_\delta} - \frac{\partial X_{M\delta}}{\partial p'_\delta}\right] F_2(\vec{x},\vec{p}',t)\, d_3p'$$

avec $X_{M\delta}$ toujours donné par (4). Tous les termes de la fonctionnelle $\dot{\mathcal{M}}(\underline{u})$ (74) sont ainsi exprimés en fonction de $\underline{n}_H(\Psi_p)$, $\underline{n}_2(\Psi_p)$ et $\underline{T}(\Psi_p)$. Une première extremalisation par rapport à $\underline{n}_H(\Psi_p)$ ou par rapport à $\underline{n}_2(\Psi_p)$ donne une équation de la forme :

$$-Z\frac{\partial n_2}{\partial t} = \frac{\partial n_H}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_{nH}}{\partial r}$$

avec

$$\phi_{nH} = -Z\,\phi_{n2} = -\rho_{H,H}^2\,\frac{n_H}{\tau_{H2}}\,q^2\left(\frac{\partial n_H}{n_H\partial r} - \frac{1}{Z}\,\frac{\partial n_2}{n_2\partial r} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial T}{T\partial r}\right)$$

Ce résultat, indépendant du régime de collisionnalité de l'assemblée des ions hydrogène est en accord avec [23] [24] [25]. On tire ensuite la valeur du flux d'énergie de l'extremalisation de $\dot{\mathcal{M}}(\underline{U})$ par rapport à $\underline{T}(\Psi_p)$ et on obtient :

$$\frac{\partial\left(\frac{3}{2} n_H T\right)}{\partial t} = - \frac{\partial \phi_{EH}}{\partial r}$$

où ϕ_{EH} possède deux valeurs distinctes suivant le régime de collisionnalité des ions légers :

$$\phi_{EH} = -(1,03)\ \frac{\rho_{\theta,H}^2 n_H}{\tau_{H2}}\ T q^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \left[\frac{\partial T}{T \partial r} + 0,48 \left(\frac{r}{R}\right)^{3/2} \left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{1}{Z}\ \frac{\partial n_2}{n_2 \partial r}\right)\right]$$

lorsque les ions hydrogène sont dans le régime banane et

$$\phi_{EH} = -1,33\ \frac{\rho_{\theta,H}^2 n_H}{(qR/\nu_{\theta,H})}\ T q^2 \left[\frac{\partial T}{T \partial r} + (0,38) \frac{qR}{\nu_{H,H} \tau_{H2}} \left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{1}{Z}\ \frac{\partial n_2}{n_2 \partial r}\right)\right]$$

lorsque les ions Hydrogène sont dans le régime plateau.

3) Transport néoclassique des ions légers en présence de "ripple" toroïdal

Jusqu'à présent nous n'avons tenu compte que de la variation radiale du champ magnétique toroïdal, il existe un autre écart du champ magnétique effectif par rapport à un champ $B_\varphi = B_0$ constant, qui est due au nombre fini des bobines toroïdales induisant ce champ. Cette corrugation du champ magnétique principal ou "magnetic ripple" peut se mettre sous la forme analytique suivante, valable pour la majeure partie des Tokamaks existant ou en projet:

$$\delta B' = B_0\ \delta(r)\ \exp -\beta\Theta^2\ \cos N\varphi$$

où N est le nombre de bobines toroïdales autour de l'axe principal. Ce nombre est en général 18 ou 24 mais il a été proposé dans le projet INTOR de le réduire à 12; il est imposé par la nécessité de prévoir autour du tore des ouvertures en nombre suffisant pour permettre le passage de sondes de mesures, ou l'introduction de moyens auxiliaires de chauffage (injection de neutres rapides ou antennes haute fréquence). La constante β est caractéristique de chaque Tokamak et varie de 0,1 à 0,4, l'amplitude relative de la corrugation $\delta(r)$ varie grossièrement de 10^{-3} sur l'axe magnétique à 10^{-1} au voisinage de la chambre à vide.

Cette corrugation du champ magnétique toroïdal peut être interprétée

comme une perturbation de l'Hamiltonien $\mathcal{H}_0$ gouvernant le mouvement des particules, cette perturbation peut se mettre sous la forme :

$$\delta H' = \mu \delta B' = \delta'(J) \cos N\phi_3 \quad \text{avec} \quad \delta'(J) = \mu B_0 \delta(r) \exp - \beta\theta^2 \qquad (75)$$

Nous sommes alors en présence de deux perturbations qui se superposent : δH due à la variation radiale de B_φ et $\delta H'$ due à la corrugation du champ B_φ. Suivant leur ordre de grandeur respectif et la valeur de la fréquence de collision nous obtenons trois domaines différents de paramètres pour lesquels nous pouvons calculer la fonctionnelle $\delta \mathcal{W}_\delta$ à ajouter à $\mathcal{W}$ calculée précédemment. Nous n'étudierons ici que le transport des ions légers donc nous négligerons la présence des impuretés et celle des électrons. A la fonctionnelle $\delta \mathcal{W}_\delta$ correspondra après minimization de $\mathcal{W}$, un terme de plus dans l'équation de transport de l'énergie, nous pourrons donc ainsi calculer dans les trois régimes de prédominance un coefficient néoclassique ionique de conduction de la chaleur due à la présence de la corrugation du champ toroïdal.

Le premier régime que l'on peut étudier est le régime dit de "piègeage effectif" dans les modulations du champ magnétique. Il correspond à la situation où la particule suivant une ligne de champ rencontre un champ magnétique toroïdal présentant, en plus des oscillations dues à la variation radiale du champ, des oscillations dues à la corrugation, suffisamment importantes pour présenter un effet miroir sensible. Suivant la valeur de son énergie, le mouvement de la particule peut se résumer à un mouvement de va et vient dans un des petits puits de potentiel représenté sur la figure (12), on dira qu'elle est piégée ou

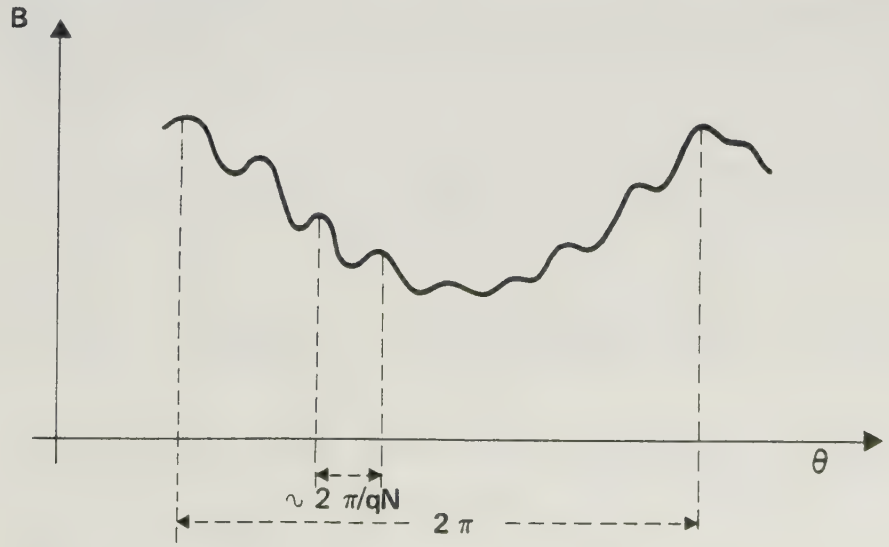


FIG. 12 : Variation B(θ) pour un régime de piégeage effectif.

localisée, jusqu'à ce qu'une collision lui apporte l'énergie suffisante pour se dépièger et entreprendre un mouvement de va et vient dans la cuvette de potentiel due à la variation radiale de B_φ ou alors, si l'énergie apportée est suffisante, elle aura une trajectoire dite circulante ou passante, c'est-à-dire décrivant autour de l'axe principal de la machine une trajectoire sans aller retour.

Ce premier régime suppose donc réalisée deux conditions ; la première exprimant que la modulation due à la corrugation est suffisamment importante pour creuser des petits puits localisés sur les bords de la cuvette de potentiel, elle s'exprime par :

$$\alpha\ (r) \exp \beta\theta^2\ |\sin\theta| < 1$$

$$\alpha\ (r) = (r/R)\ /\ Nq\ \delta(r)$$

la seconde condition porte sur la fréquence de collision qui ne doit pas être trop importante pour que les particules piègées puissent le rester pendant un temps suffisamment long :

$$\nu_{HH} < \delta^{3/2}\ (v_{th,H}\ N/R)$$

Alors nous pouvons utiliser le résultat du paragraphe (A.IV) où la perturbation $\delta H'(\delta(r))$ avec $m' = (0,0,N)$ joue le rôle de perturbation dominante et ou correlativement la perturbation $\delta H(r/R)$ avec $m'' = (0,1,0)$ joue le rôle de deuxième perturbation. Nous vérifions en effet la condition de validité du résultat (42) avec $\partial h/\partial J_2 = \nu_{//}/qR_0$, $\partial h/\partial J_3 = \frac{\nu_{//}}{R_0}$ et $X = 1/Nq$. La fonction de distribution des ions hydrogène étant toujours prise sous la même forme (66), l'application du résultat (42) au cas pris en compte ici fournit l'expression de $\delta \dot{cl}_\delta$:

$$\delta \dot{cl}'' = \int \ldots (0,76)\ 2^{9/2} \pi^3\ \delta(r)^{3/2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{cT}{eB_0}\right)^2 \frac{m_H R^2 G(\alpha,\beta)}{\nu_{HH}}$$

$$\left[\frac{\partial n_H}{n_H \partial V} - \frac{e}{T}\frac{\partial \Psi}{\partial V} + \left(\frac{e}{2\pi c}\right)\left(\frac{B_0}{2\pi R}\right)\frac{c}{q} + \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T \partial V}\right]^2 x^4 \exp -\alpha\ d\alpha\ dV$$

ce qui, utilisant la même procédure variationnelle que précédemment conduit d'abord à un terme supplémentaire du flux de particule nul (ambipolarité lorsque l'on néglige les électrons) puis à un terme additionnel dans le flux

d'énergie ; à ce terme on fait correspondre le coefficient de conduction de chaleur additionnel défini par (71) et qui a pour expression :

$$\chi_i^R = 41 \frac{\delta(r)^{3/2}}{\nu_{nn}} \left(\frac{cT}{eB_0R}\right)^2 G(\alpha,\beta)$$

$$G(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_x ;\ \alpha \exp\beta\theta^2|\sin\theta|<1} \left(1 - \alpha \sin\theta \exp\beta\theta^2\right)^{11/4} \exp -\frac{3}{2}\beta\theta^2\sin^2\theta \, d\theta$$

La fonction $G(\alpha,\beta)$, calculée numériquement pour différentes valeurs typiques de β est représentée sur la figure (13) en fonction de α . Quoique

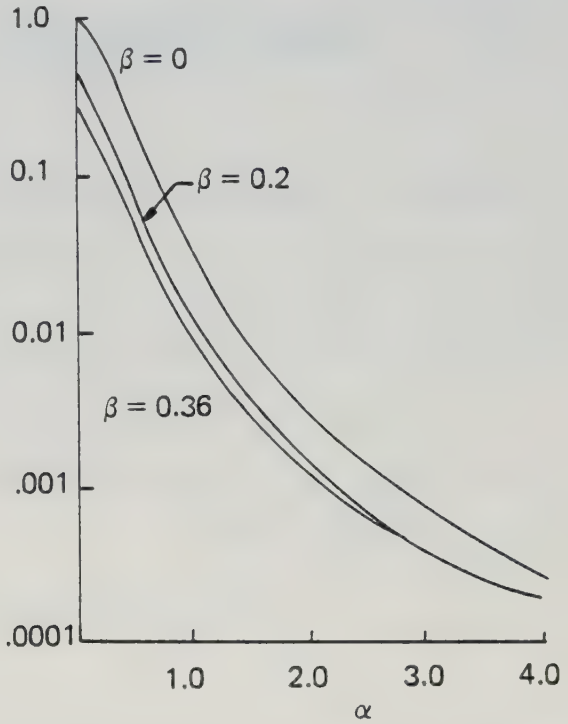


FIG. 13 : G(α) en régime de piégeage effectif

différente dans sa formulation de l'expression obtenue par Uckan et al [26] , elle a sensiblement les mêmes valeurs.

Le second régime que l'on peut étudier est le régime dit "Ripple banana" ; dans ce cas l'amplitude de la corrugation de champ magnétique n'est pas assez forte pour "creuser" de véritables puits de potentiel dans la courbe de potentiel due à la variation radiale du champ toroïdal (figure (14)). Les particules

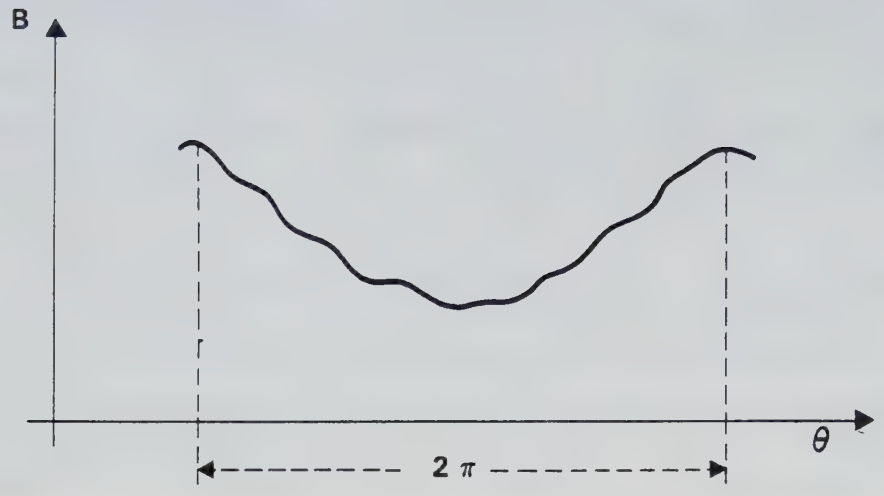


FIG. 14 : Variation B(θ) pour un régime «ripple banana».

effectuent alors des trajectoires de type banane, mais elles subissent l'effet de la corrugation surtout aux extrêmités de leur trajectoires qui ne se réfléchissent plus symétriquement, d'où un effet de dérive pris en compte lors du calcul du transport d'énergie correspondant à cette situation.

Ce régime est caractérisé par deux conditions ; la première portant sur l'amplitude de la corrugation (condition inverse de celle décrivant le régime de piègeage effectif)

$$\alpha \exp \beta\theta^2 \, |\sin\theta| > 1$$

et une seconde condition portant sur la fréquence de collision nécessaire pour qu'une particule puisse décrire plusieurs trajectoires bananes avant qu'une collision ne lui fasse décrire une trajectoire circulante:

$$\nu_{HH} < (\nu_{\alpha H} N/R)\,(r/R)^{3/2}\,(N^3 q^3)^{-1}$$

Dans cette situation nous utilisons encore le résultat du paragraphe (A.IV) mais cette fois avec la perturbation $\delta H\,(r/R)$, $m^* = (0,1,0)$ jouant le rôle de perturbation dominante et la perturbation $\delta H'(\delta(r))$, $m'^* = (0,0,N)$ jouant le rôle de deuxième perturbation. La condition d'application du résultat (42) est encore pleinement vérifiée, et celui-ci fournit dans ce cas l'expression de $\delta \mathcal{H}''$:

$$\delta \dot{\mathcal{M}}'' = \int \dots \frac{2^{11/2} x^3}{3} \delta^2(r) \left(\frac{r}{R}\right)^{3/2} \left(\frac{cT_i}{eB_0}\right)^2 \frac{m_H R^2 I\, G(\alpha,\beta)}{(qN)^2 \nu_{HH}} \left[\frac{\partial n_H}{n_H \partial V} - \frac{e}{T}\frac{\partial \Psi}{\partial V} + \left(x - \frac{3}{2}\right) \frac{\partial T}{T \partial V} \right]^2 x^4 \exp -x \, dx \, dV$$

$$I = \int_0^{2qN} J_0^2(z)\, z\, dz \simeq 2qN/\pi \qquad \text{si} \quad qN \gg 1$$

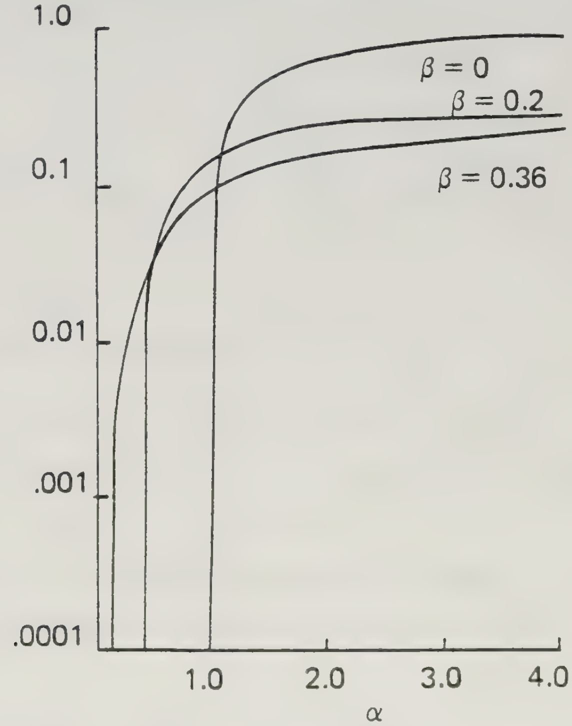
Nous obtenons alors toujours par la même procédure variationnelle un coefficient de conduction de chaleur ionique additionnel :

$$\chi_i^{BR} = 23 \frac{\delta(r)^2}{\nu_{HH}} \frac{1}{qN} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \left(\frac{cT_i}{eB_0 R}\right)^2 G'(\alpha,\beta)$$

$$G'(\alpha,\beta) = (2\pi)^{-1} \int_{0;\, \alpha \exp \beta\theta^2 / \sin\theta / > 1}^{2\pi} \exp -2\beta\theta^2 \, d\theta$$

la fonction $G'(\alpha,\beta)$, calculée numériquement pour différentes valeurs typiques de β est représentée sur la figure (15) en fonction de α .

FIG. 15 : G'(α) en régime «ripple banana»



Enfin le troisième régime s'obtient, toujours en l'absence de piégeage effectif dans les puits de la corrugation lorsque la fréquence de collision est suffisamment forte pour empêcher les particules de suivre le régime précédent ; ce régime est appelé régime "Plateau-Ripple" et il est

défini par les conditions :

$$\alpha \exp \beta\theta^2 \, |\sin\theta| > 1$$

$$\nu_{HH} > (\nu_{H,H} N/R)\,(r/R)^{3/2}\,(N^3 q^3)^{-1}$$

Dans ce cas les effets des deux perturbations $\delta H(r/R)$ et $\delta H'(\delta(r))$ s'additionnent linéairement, on est dans les conditions du régime Landau du paragraphe (A.IV) et la fonctionnelle $\delta\dot{W}'$ se calcule donc de manière analogue à celles qui ont été utilisées pour l'obtention des coefficients néoclassiques ; on obtient :

$$\delta\dot{W}' = \int \ldots \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2\pi)^4}{2}\left(\frac{c\,T_i}{e\,B_0}\right)^2 \delta(r)^2\, G'(\alpha,\beta)\,\frac{n_H q^2 R^3 m_H^{1/2}}{T^{1/2}}\, N\left[\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H\,\partial V}\right.$$

$$\left. - \frac{e}{T}\,\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial V} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial \underline{T}}{\underline{T}\,\partial V}\right]^2 x^2 \exp -x \; dx \; dV$$

Cette expression conduit à la valeur du coefficient de transport "plateau-ripple" :

$$\chi_i^{pR} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\frac{\delta(r)^2\, N q^2 R^3}{r^2}\left(\frac{c\,T_i}{e\,B_0 R}\right)^2\left(\frac{m_H}{T}\right)^{1/2} G'(\alpha,\beta)$$

4) Application en simulation numérique* [27]

Les coefficients de conduction ionique de la chaleur ont été introduits dans le code numérique de simulation d'une décharge Tokamak, développé à Fontenay-aux-Roses [28], afin de tester l'importance des pertes d'énergie dues aux corrugations du champ magnétique dans diverses machines avec leur système de chauffage prévu.

Dans le Tokamak TFR 600 dont la décharge est centrée à un rayon R_0 = 98 cm, la perturbation de champ magnétique peut être mise sous la forme analytique :

$$\delta(r,\theta) = 10^{-3} \exp(0{,}186\, r) \exp -0{,}36\,\theta^2$$

---

* Travail fait en collaboration avec B. Gagey et J.P. Girard

et quelque soient les valeurs du courant plasma et du facteur de sureté q, c'est le régime de piègeage effectif qui est prépondérant dans une large partie du plasma. La figure (16) montre les valeurs des coefficients ionique

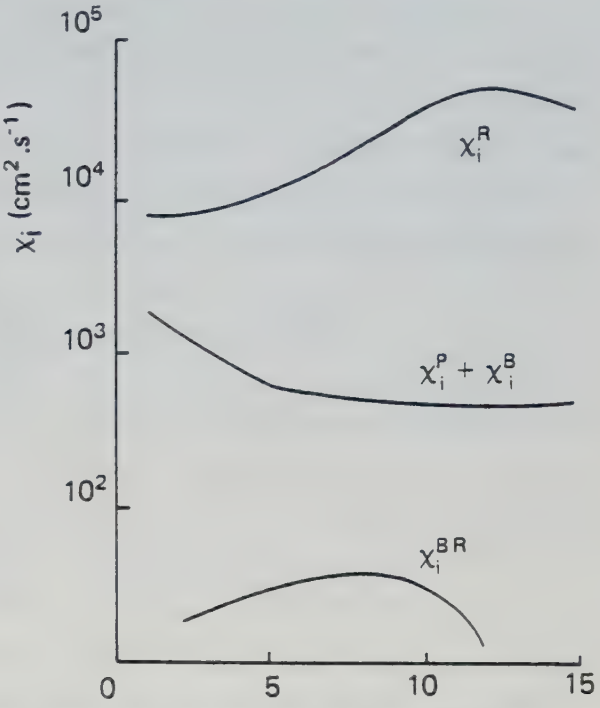


FIG. 16 : Heat conduction coefficients in TFR 600.

de conduction de chaleur en fonction du rayon pour un plasma de haute densité ($n_e(o) = 6.10^{13} cm^{-3}$), le coefficient χ_i^{RP} étant négligeable dans tout le plasma. Compte tenu de ces coefficients, la simulation numérique indique que pour une puissance de chauffage haute fréquence de 2,4 MW la température ionique centrale est limitée à 3,5 KeV, à cause de la conduction de chaleur supplémentaire introduite par ce champ parasite. Si en revanche on déplace le centrage du plasma de 4 cm vers l'intérieur du tore, c'est-à-dire vers les champs forts, la perturbation de champ magnétique peut se mettre sous la forme

$$\delta(r,\theta) = 4,6.10^{-4} \exp(0,18\, r) \exp - 0,2\,\theta^2$$

c'est-à-dire une valeur centrale deux fois moindre et une dépendance en θ changée ; pour la même densité et la même puissance de chauffage, la simulation montre que la température ionique centrale peut alors atteindre la valeur de 5,9 KeV. Nous disposons ainsi d'une possibilité expérimentale de tester l'importance de ces pertes parasites dont l'importance a peut être été mise en évidence accidentellement sur le Tokamak PLT lorsqu'une des bobines toroïdales a été mise accidentellement hors service [ ] . De plus les calculs effectués dans le cas de TFR 600 semblent montrer que ces pertes présentent une sorte de seuil au-dessous duquel les pertes par les ions deviennent inférieures aux pertes par conduction de chaleur électronique et n'empêchent plus la température

ionique du plasma d'atteindre des valeurs très proche de celles attendues en l'absence de corrugation de champ magnétique.

La configuration du projet INTOR a aussi été étudiée. Les caractéristiques du Tokamak INTOR, un projet international pour réaliser une puissance électrique nette avec une telle configuration, sont les suivantes : le tore a pour grand rayon R_0 = 4,80 m et pour petit rayon a = 1,50 m, entouré de 12 bobines et faisant circuler un courant plasma de 4 MA. Un calcul de champ magnétique montre que la corrugation peut se mettre sous la forme analytique :[29]

$$\delta(r,\theta) = \left(0{,}2 + 1{,}8\,\frac{r^2}{a^2}\right)\times 10^{-2}\,\exp\left(-0{,}2\,\theta^2\right)$$

Les projets de chauffage du plasma consistent en sources de neutres rapides (200 KeV) injectant perpendiculairement dans le tore une puissance de 80 MW. On essaye de suivre par la simulation numérique et pour un plasma de densité $n_i(o) = 10^{14}\,cm^{-3}$, l'évolution de la température ionique centrale après le début du chauffage. Le calcul a été fait pour différentes valeurs de $\delta(0,0)$ (figure (17)) et on voit qu'avec l'amplitude de corrugation proposée par le projet, la température ionique centrale sature après 2 s d'injection à une valeur d'environ 13 KeV, bien inférieure aux conditions d'ignition ; celle-ci ne peut être atteinte qu'avec une valeur $\delta(0,0)$ de l'ordre de 4.10^{-4} soit

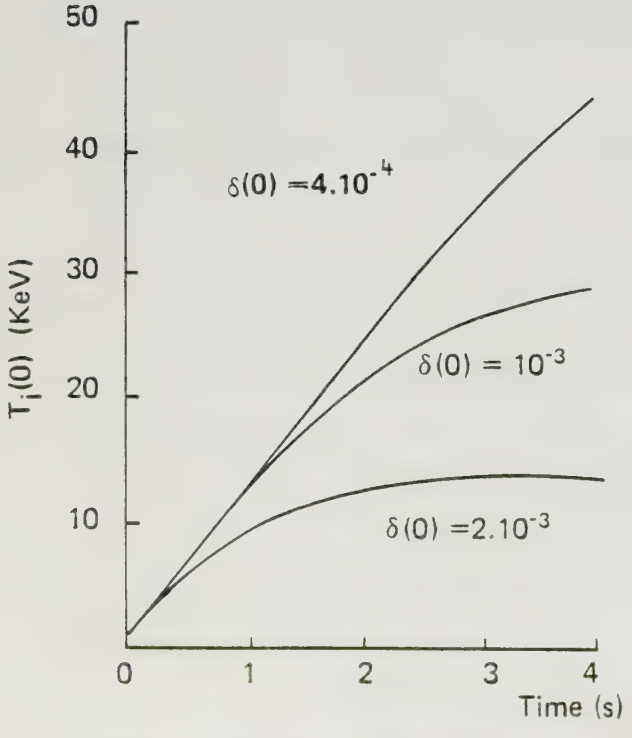


FIG. 17 : Evolution of the central temperature during neutral injection in INTOR.

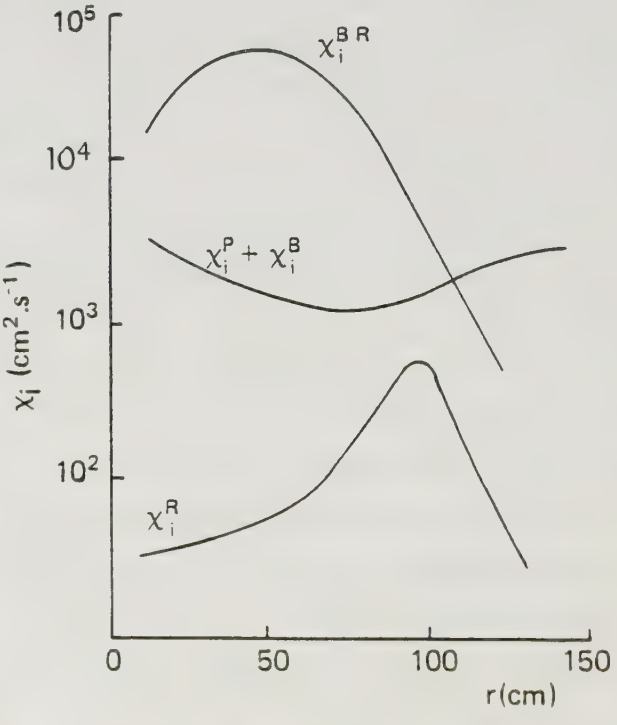


FIG. 18 : Heat conduction coefficients in INTOR.

cinq fois moindre que celle proposée et ceci environ 4,5 s après le début de l'injection des neutres rapides. Pour cette valeur de $\delta(0,0)$, le régime de piègeage effectif est absent de toute la décharge ainsi χ_i^R devient négligeable et c'est alors le terme de conduction χ_i^{BR} qui devient prépondérant pour expliquer les pertes de chaleur au coeur du plasma (figure (18)).

Pour de grandes machines qui auront des plasmas à très faibles fréquences de collision, les conditions sur la valeur centrale de la corrugation du champ magnétique sont très astreignantes pour pouvoir atteindre l'ignition. Ainsi la configuration magnétique des machines en projet, qui doit préserver de larges accès pour l'injection de neutres mais présenter de faibles valeurs de perturbations du champ principal, doit être optimisée avec précaution entre ces deux exigences opposées.

B.III - ETUDE D'UNE CONFIGURATION MAGNETIQUE TOKAMAK EN PRESENCE D'ILOTS

Une configuration magnétique Tokamak peut-être le siège d'"ilots magnétiques", c'est-à-dire de domaines où les surfaces magnétiques, au lieu d'être normalement emboîtées les unes dans les autres, s'emboîtent autour d'un axe magnétique secondaire, jusqu'à une "séparatrice", à partir de laquelle la topologie normale réapparaît. On montre sur la figure (19), un exemple de projection de tels ilots dans un plan $\varphi = cte$.

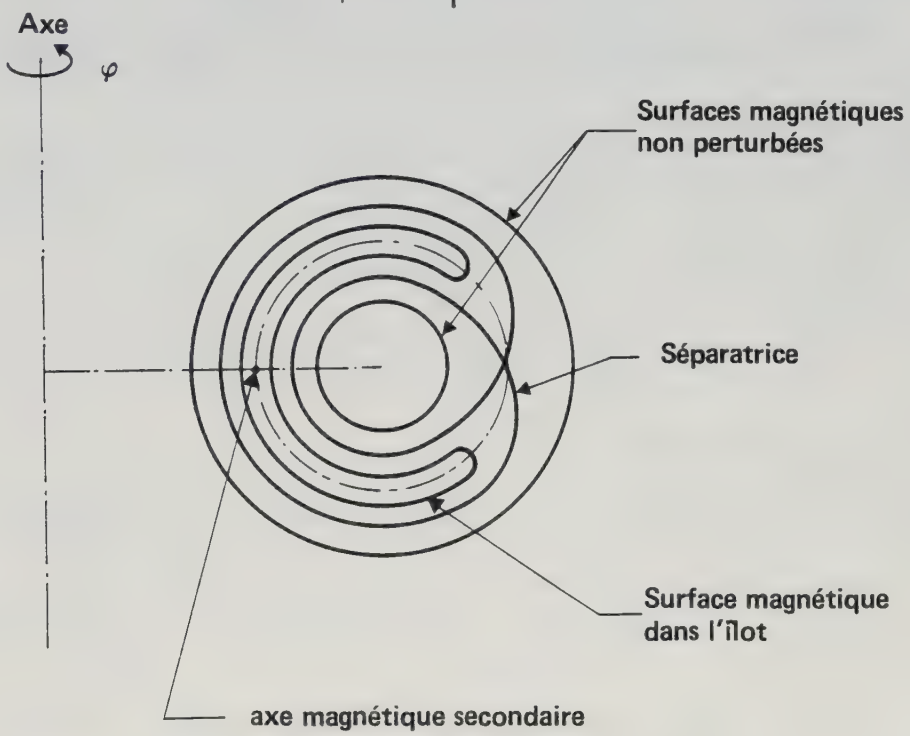


FIG. 19 : Exemple de configuration magnétique avec îlot.

1) Application générale des principes variationnels à une telle situation

On peut associer, dans un ilot, à chaque surface magnétique de volume V un flux toroïdal $\Psi_T(V,t)$ et un flux hélocoïdal $\Psi_H(V,t)$, embrassé par les lignes de la surface ayant même topologie que l'axe magnétique secondaire. Les particules dans une configuration à ilots magnétiques peuvent être encore décrites par des variables angulaires et d'action, avec en particulier :

$$J_2 = \frac{e}{2\pi c}\,\Psi_T$$

$$J_3 = \frac{e}{2\pi c}\,\Psi_H + \ell R m v_\varphi$$

si ℓ est le nombre de grands tours réalisés par l'axe secondaire. Si les ilots ont une extension suffisante, nous pouvons poser que la fonction de distribution $\mathcal{F}(J,\phi)$ de chaque espèce est une fonction $f(J)$ des variables J voisine d'une Maxwellienne décalée c'est-à-dire que chaque assemblée est en équilibre sur chaque surface magnétique avec une vitesse moyenne autour de l'axe principal. L'expression (20) du principe variationnel s'écrit ici, en tenant compte d'une évolution des surfaces magnétiques :

$$\dot{\mathcal{W}}(\underline{U}) = \sum_\alpha \frac{2}{T}\iiint \frac{\partial f}{\partial t}\,\underline{U}(J)\,(2\pi)^3 d_3 J \;+\; \dot{S}(\underline{U}) \qquad (76)$$

Ecrivant encore $f(J,t) = A\exp -(h-U)/T$ sous la forme $f(J,t) = \nu(J_2,J_3)\exp -\frac{h}{\tau(J_2)}$, on trouve (cf. Annexe II) :

$$\sum_\alpha \frac{2}{T}\iiint \frac{\partial f}{\partial t}\,\underline{U}(J)(2\pi)^3 d_3 J = \sum_{i,e} 2\int\Big\{\frac{\partial m}{\partial t}\log \underline{n} + \frac{3}{2}\,m\,\frac{\partial T}{T\partial t}\log \underline{T} + \frac{e}{2\pi c}\,\frac{\partial G}{\partial t}\left(\rho \log \underline{T} + \frac{n}{\underline{m}}\,\rho_-\right)\Big]\,dV$$

$$\dot{S}(\underline{U}) = \frac{1}{T}\int \eta\,\underline{I}^2\,dV$$

où - $n(V,t) = \nu\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T(V,t), \frac{e}{2\pi c}\Psi_p(V,t), t\right)$, $T(V,t) = \tau\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T(V,t), t\right)$ sont la densité et la température sur la surface magnétique de volume V.

- G est la fonction définie par $\Psi_p = G(\Psi_T, t)$, le flux toroïdal Ψ_T étant un invariant ici : $\Psi_T = \Psi_T(V,t)$
- $\rho_{i,e} = m_{i,e} V_{oi,e}/RT$ avec $V_{oi,e}$ vitesse moyenne ionique ou électronique autour du grand axe.
- I est le courant moyen sur la surface magnétique considérée :

$$I = ne\,(V_{oe} - V_{oi}) = eTR\,(\rho_e - \rho_i) \qquad \underline{I} = eTR\,n\left(\frac{\rho_e}{\underline{n}} - \frac{\rho_i}{\underline{m}}\right)$$

- η est la résistivité du plasma.

Dans l'expression de $\dot{S}(\underline{U})$ nous n'avons considéré que l'effet Joule de friction de l'assemblée des électrons sur l'assemblée des ions. Bien entendu $\dot{S}(\underline{U})$ contient aussi des termes proportionnels aux gradients $\partial n/\partial r$, $\partial T/\partial r$. Ces termes jouent un rôle crucial (cf. paragraphe B.II) sur

l'évolution des fonctions $n(V,t)$, $T(V,t)$; ils influencent aussi un peu l'évolution de la fonction $G(\Psi_T,t)$ par l'effet "Bootstrap" mais cet effet est négligeable si la densité de courant le long des lignes de flux est supérieure à la densité de courant diamagnétique transverse au champ magnétique. Nous obtenons alors, en variant (76) par rapport à ρ_i ou ρ_e , l'équation :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial G}{\partial t} = \eta\, 2\pi R I \qquad (77)$$

qui implique une variation très lente de la fonction $G(\Psi_T,t)$.

Pour la détermination du champ autocohérent à l'équilibre, nous utiliserons le principe variationnel (49) :

$$\mathcal{W}(\vec{A}) = -\iiint \frac{|\vec{\nabla}\times\vec{A}|^2}{8\pi}\, d_3x - \int\!\!\ldots\!\underline{h}(J)\, f(J,t)\, d_3J\, d_3\phi$$

$\vec{A}$ est le potentiel vecteur du champ de base créant les surfaces magnétiques toriques emboîtées. Du point de vue de la variation le second terme peut s'écrire :

$$\int\!\!\ldots\!\underline{h}(J,\vec{A})\, f(J)\,(2\pi)^3 d_3J = \int \tau(J_2)\,\frac{\nu(J_1,J_3)}{(2\pi m\,\tau(J_1))^{3/2}}\,\exp-\frac{h(J,\vec{A})}{\tau(J)}\,(2\pi)^3 d_3J$$

et si nous effectuons l'intégration en utilisant des variables angulaires et d'action $\underline{J}$ associées à la présence de $\vec{A}$, ces variables ne servent que de variables d'intégration et alors :

$$\int\!\!\ldots\!\tau(\underline{J})\,\frac{\nu(\underline{J})}{(2\pi m\,\tau(\underline{J}))^{3/2}}\exp-\frac{h(\underline{J},\vec{A})}{\tau(\underline{J})}\,(2\pi)^3 d_3J = \int\!\!\ldots\!\tau\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,t\right)\nu\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,\frac{e}{2\pi c}\Psi_p,t\right)\,dV$$

où $\Psi_T(V,\vec{A},t)$, $\Psi_p(V,\vec{A},t)$ sont les flux embrassés par la surface magnétique de volume V en présence du champ $\vec{A}$. Si on limite ce champ au sous-ensemble qui préserve la relation, supposée connue

$$\Psi_p(V,\vec{A},t) = G(\Psi_T(V,\vec{A},t))$$

nous avons :

$$\tau\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,t\right)\nu\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,\frac{e}{2\pi c}\Psi_p,t\right) =$$

$$\tau\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,t\right)\nu\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,t\right) = T\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,t\right)n\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,t\right) = P\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T,t\right)$$

où la fonction $p(\Psi_T)$ à l'équilibre est supposée elle aussi connue. La fonctionnelle $\mathcal{W}(\vec{A})$ s'écrit alors :

$$\mathcal{W}(\vec{A}) = -\iiint \frac{|\vec{\nabla}\times\vec{A}|^2}{8\pi} d_3x - \iiint p(\Psi_T(V,\vec{A}),t)\, dV \qquad (78)$$

elle doit être extremum pour les variations de $\vec{A}$ choisis dans la classe des potentiels réalisant la condition $\Psi_p(V,\vec{A}) = G(\Psi_T(V,\vec{A}))$.

La connaissance des fonctions $p(\Psi_T,t)$ et $G(\Psi_T,t)$, et des conditions aux limites détermine donc à chaque instant la structure des surfaces magnétiques. En fait le terme de (78) proportionnel à $p(\Psi_T)$ joue un rôle faible tant que $\beta_{pol} < R/r$. L'effet d'un champ électrostatique perpendiculaire aux surfaces magnétiques, que nous avons implicitement ignoré plus haut, joue lui aussi un rôle faible tant qu'il correspond à une énergie cinétique du plasma très inférieure à l'énergie magnétique poloïdale. Ceci est vérifié si l'échelle de temps de l'évolution est $\gg$ au temps caractéristique de propagation des ondes d'Alfven le long des lignes de flux. Il apparaît donc finalement que si la fonction $G(\Psi_T,t)$ est connue, la configuration magnétique est entièrement imposée. L'évolution de cette configuration est donc suivie, à chaque instant, de façon autonome, par la relation d'évolution (77).

En réalité les phénomènes sont plus complexes. Il peut arriver que l'assemblée des ions ait une vitesse moyenne v_i autour de l'axe principal différente au voisinage de chaque ilot magnétique. Le potentiel $\vec{A}$ qui détermine la structure magnétique est alors de la forme :

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, \omega_1 t, \omega_2 t, \ldots, t)$$

variant lentement en t et 2π-périodique par rapport à $\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots$. Nous pouvons d'abord remarquer que la relation $\Psi_p = G(\Psi_T,t)$ est donnée à chaque instant par :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial G}{\partial t} = \eta\, 2\pi R\, I \qquad (79)$$

qui pour une faible resistivité η implique que la fonction $G(\Psi_T,t)$ varie lentement au cours du temps et peut-être considérée comme indépendante de $\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots$. L'équation (79) donne alors l'évolution lente $\partial G(\Psi_T,t)/\partial t$ si la densité de courant I sur la surface magnétique Ψ_T est prise en moyenne sur les échelles de temps $2\pi/\omega_1$, $2\pi/\omega_2$, ... Pour ω_1 , ω_2 , ... donnés, le champ $\vec{A}(\vec{x}, \omega_1 t, \omega_2 t, \ldots, t)$

peut-être calculé en exprimant que la fonctionnelle $\mathcal{W}(\vec{\mathcal{A}})$ définie par (78) est extremum. Les valeurs des variables d'actions J_2 et J_3 sont encore très voisines de $(e/2\pi c)\,\Psi_T(V)$, $(e/2\pi c)\,\Psi_p(V)$. Le raisonnement donné plus haut est alors encore applicable. Nous négligeons encore l'effet de la pression et l'effet d'un champ électrostatique perpendiculaire. Cette dernière condition est réalisée si les fréquences $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ vérifient :

$$\omega_i < c_A / L$$

où c_A est la vitesse d'Alfven et L est l'échelle caractéristique de reconnection des lignes de flux dans chaque domaine. Le champ $\vec{\mathcal{A}}$ peut-être alors calculé en rendant extremum la fonctionnelle

$$\mathcal{W}(\underline{\vec{\mathcal{A}}}) = -\frac{1}{8\pi}\int\dots\left|\vec{\nabla}\times\underline{\vec{\mathcal{A}}}[\vec{x},\omega_1 t,\omega_2 t,\dots,t)\right|^2 d_3x\, d\omega_1 t\, d\omega_2 t\, d\omega_3 t \qquad (80)$$

pour les variations de $\underline{\vec{\mathcal{A}}}$ au voisinage de $\vec{\mathcal{A}}$ choisies dans l'ensemble réalisant la condition $\Psi_p(V,\underline{\vec{\mathcal{A}}}) = G\left(\Psi_T[V,\underline{\vec{\mathcal{A}}})\right)$. Bien entendu, pour $\omega_1, \omega_2, \dots$ fixés, et des fonctions G données pour chaque topologie, ce principe conduit à une valeur de $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},\omega_1 t,\omega_2 t,\dots,t)$ distincte du champ $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ dans le cas statique. En particulier la valeur de $-\mathcal{W}(\vec{\mathcal{A}})$, c'est-à-dire l'énergie magnétique présente n'est pas la même que dans le cas stationnaire.

Il reste évidemment à calculer les fréquences $\omega_1, \omega_2, \dots$ dans la mesure où elles ne sont pas imposées par les conditions aux limites. Ces fréquences libres, si leur nombre est connu, peuvent être déterminées en rendant extremum la production d'entropie dans le plasma (cf. paragraphe A.VI). Nous verrons plus loin que le mouvement des ilots magnétiques crée une production d'entropie dès que leur vitesse v_I dans la direction toroïdale est distincte de la vitesse v_i des ions dans cette direction au voisinage de l'ilot considéré :

$$S = \sum_{\text{ilots}} \mathcal{D}_i\,(v_{I,i} - v_{i,i})^2 \qquad (81)$$

où les indices 1, 2, ... désignent les divers ilots magnétiques.
Cette production d'entropie correspond au fait que dans le repère lié aux ilots l'assemblée des ions à l'extérieur tend par viscosité à entraîner les ions à l'intérieur le long des lignes de flux et leur fait alors subir un effet de friction dû à la modulation $\left(\sim \frac{r}{R}\cos\Theta\right)$ du champ toroïdal. Nous montrerons plus loin que, si les ions sont dans le régime banane par exemple :

$$\mathcal{D}_1 = 2{,}8\ r\,\delta_1\,2\pi R\left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}\sqrt{q}\,\nu_H\,m_H\,v_{th,H}^{-2}$$

où δ_1 est l'épaisseur maximum de l'ilot et ν_H est le taux de collisions :

$$\nu_H = \frac{4\sqrt{2\pi}\,e^4 \log\Lambda\, m_H}{3\sqrt{m_H}\,T^{3/2}}\left(1 + \mathcal{O}(Z_{eff})\right)$$

Bien entendu l'existence des vitesses $v_{i1}, v_{i2}, \ldots$ implique par elle-même une production d'entropie

$$\dot{S} = \mathcal{B}(v_{i1}, v_{i2}, \ldots)$$

due aux forces créant ces vitesses et aux effets de viscosité. Cette quantité $\mathcal{B}$ peut-être calculée en première approximation comme si les ilots étaient absents. Les fréquences $\omega_1, \omega_2, \ldots$ et le profil radial de vitesse des ions (c'est-à-dire le potentiel électrique sur les diverses surfaces magnétiques en dehors des ilots) peut-être calculé en rendant extremum la quantité :

$$\dot{S} = \left[\sum_{ilots} \mathcal{D}_i\,(\underline{v}_{i,1} - \underline{v}_{i,2})^2 + \mathcal{B}(\underline{v}_{i,1}, \underline{v}_{i,2}, \ldots)\right] \qquad (82)$$

Il reste cependant encore à déterminer le nombre de fréquences libres $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Nous ne pouvons ici que donner le critère intuitif indiqué dans le paragraphe A.VI : un système d'ilots indépendants développant deux fréquences ω_1, ω_2 aura tendance à se bloquer en phase, en réduisant le couple (ω_1, ω_2) à une seule fréquence ω si les énergies magnétiques $E(\omega_1,\omega_2)$, $E(\omega)$ et les productions d'entropie $\dot{S}(\omega_1,\omega_2)$, $\dot{S}(\omega)$ dans les deux états (ω_1,ω_2), (ω) vérifient :

$$E(\omega_1,\omega_2) - E(\omega) > \left(\dot{S}(\omega) - \dot{S}(\omega_1,\omega_2)\right).T/\Omega$$

où Ω est une fréquence comparable à $|\omega_1 - \omega_2|$.

2) Evolution et rotation d'un ilot de faible extension

Nous examinons maintenant l'origine physique du couplage entre la rotation d'un ilot et la vitesse de l'assemblée des ions, en nous plaçant dans le cas le plus simple d'un seul ilot d'amplitude faible, créé par des courants

situés à l'extérieur du plasma. Le potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}}$ dont dérive la configuration magnétique est alors composé de potentiel vecteur $\vec{A}$ créant les surfaces magnétiques toriques emboîtées et d'une perturbation longitudinale $\delta\vec{A}$, parallèle à $\vec{B}$, de la forme :

$$\begin{aligned} \delta\vec{A}_\varphi &= \vec{A}_+(t)\exp(i\ell\theta + im\varphi + i\omega t) + \text{c.c.} \\ \delta\vec{A}_\varphi &= \vec{a}(t)\cos(\ell\theta + m\varphi + \omega t) \\ |\vec{a}(t)| &= |\vec{A}_+(t)|/2 \ll |\vec{A}| \end{aligned} \qquad (83)$$

cette perturbation introduit une surface de résonance $r = r_o$ où r_o est défini par : $m + \ell/q(r_o) = 0$. De part et d'autre de cette surface de résonances, et en son voisinage, les surfaces magnétiques toriques sont perturbées et sont alors décrites par l'équation :

$$(r - r_o)^2 + b\cos(\ell\theta + m\varphi + \omega t) = K \qquad (84)$$

où $b = 2\ell\, a(t)/B_\theta\, \dot{q}_{(r=r_o)}$ et K est une constante pour chaque nouvelle surface magnétique perturbée.

Nous pouvons toujours faire en pratique les deux hypothèses suivantes, d'une part nous supposeront que le temps caractéristique d'évolution de l'ilot est très supérieur à L/ν_{He} , où L est une longueur caractéristique de l'ilot de telle manière que l'assemblée des électrons puisse être considérée à chaque instant comme étant en équilibre sur chaque surface magnétique sur laquelle donc la température électronique T_e sera prise comme constante. Nous supposerons d'autre part que le temps caractéristique τ d'évolution de l'ilot dans le repère où les ions sont immobiles est très supérieur à L/C_A de façon à assurer à chaque instant l'équilibre de la configuration caractérisé par une densité de courant I constante sur chaque surface magnétique. Cette deuxième hypothèse est en fait équivalente au principe d'extremum (78) négligeant les effets cinétiques. La première hypothèse, avec la loi d'Ohm généralisée et prise en moyenne sur chaque surface magnétique implique la loi d'évolution (79). (Notons que la prise en moyenne de la loi d'Ohm :

$$\left\langle -\frac{1}{c}\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \nabla_{/\!/}\Psi \right\rangle = \eta I$$

sur une surface magnétique élimine l'effet du gradient $\nabla_{/\!/}\Psi$ le long des lignes de forces, qui se superpose à l'effet du champ inductif $\partial\,\delta A_\varphi/\partial t$).

Les deux hypothèses imposent donc complètement l'évolution de l'amplitude de l'ilot.

Loin de l'ilot l'équilibre général du plasma impose au champ a de vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a}{\partial r}\right) - \frac{l^2 a}{r^2} - \frac{\partial I}{c\partial r}\cdot\frac{l}{r}\frac{a}{B_0}\frac{R}{m+l/q(r)} = 0 \qquad (85)$$

D'autre part la continuité de la composante radiale $\delta B_r \sim \partial\delta A/r\partial\theta$ impose la continuité de a de part et d'autre de l'ilot. Les conditions aux limites imposées par les courants hélicoïdaux extérieurs au plasma créant l'ilot permettent alors de calculer la valeur de $a(r)$ dans tout le plasma si on connait la valeur de la discontinuité :

$$\Delta' = \left[\frac{\partial a}{a\partial r}\right]$$

de la dérivée logarithmique $\partial a/a\partial r$ de part et d'autre de l'ilot. Si nous écrivons la discontinuité de la composante $\delta B_\theta = -\frac{\partial a}{\partial r}\cos(l\theta + m\varphi + \omega t)$ sur la couche résonante, nous devons vérifier $[\delta B_\theta] = (4\pi/c)\,\mathcal{J}(\theta,\varphi,t)$ où $\mathcal{J}(\theta,\varphi,t)$ est le courant dans la couche au point (r_0,θ,φ), par cm de longueur compté en $r_0 d\theta$. Nous aboutissons ainsi à une équation liant la valeur Δ' calculée au voisinage de la surface de résonance, à partir de la condition d'équilibre du reste du plasma, et $\mathcal{J}(\theta,\varphi,t)$ l'intensité du courant dans la couche résonante :

$$\frac{4\pi}{c}\,\mathcal{J}(\theta,\varphi,t) = -a\cos(l\theta + m\varphi + \omega t)\,\Delta' \qquad (86)$$

Dans la couche résonante maintenant, qui comprend l'ilot, la densité de courant I est une fonction de ψ_H donnée par la loi d'Ohm généralisée projetée sur la direction φ :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \delta A_\varphi}{\partial t} - e_e\nabla_{//}\psi - T_e\nabla_{//}n = \eta I$$

ou T_e est une constante. La densité I est alors obtenu en intégrant cette équation entre deux surfaces voisines S et $S + dS$:

$$I = -\frac{1}{\eta c}\frac{\partial a}{\partial t}\iint_{S,S+dS}\cos(l\theta + m\varphi + \omega t)\,d_2x \times \frac{1}{dS}$$

En écrivant que l'épaisseur δr comprise entre ces deux surfaces magnétiques est égale à $\delta r = C/\sqrt{k - b\cos u}$ où C est une constante et $u = l\theta + m\varphi + \omega t$ il vient :

$$I = -\frac{1}{\eta c}\frac{\partial a}{\partial t}\;\frac{\oint \cos u\, du/\sqrt{K - b\cos u}}{\oint du/\sqrt{K - b\cos u}}$$

Réécrivons maintenant l'équation (86) sous la forme :

$$\int \frac{4\pi}{c} J(u)\cos u\, du = -a\pi\Delta'$$

$$J(u) = \int I\,(K(r,u))\, dr$$

Il vient alors :

$$-a\pi\Delta' = \frac{4\pi}{c}\iint I(K(r,u))\cos u\, du\, dr$$

C'est-à-dire, compte tenu de l'expression $dr = dK/2\sqrt{K - b\cos u}$ au voisinage d'une surface magnétique perturbée :

$$\frac{\partial a}{a\partial t} = \frac{\Delta'\eta c^2}{2\sqrt{b}}\left[\int \frac{dK}{b}\,\frac{\left(\oint \cos u\, du/\sqrt{\frac{K}{b} - \cos u}\right)^2}{\left(\oint du/\sqrt{\frac{K}{b} - \cos u}\right)}\right]^{-1}$$

$$= 0{,}12\,\frac{\Delta'\eta c^2}{\sqrt{b}}$$

où les intégrales $\oint$ sont à prendre pour toutes les valeurs définissant le radical $\sqrt{\frac{K}{b} - \cos u}$ réel et avec K/b variant de (- 1 à + 1 dans l'ilot, de 1 à l'∞ pour la partie du plasma extérieure ($r > r_0$) de l'ilot et de 1 à l'∞ pour la partie du plasma extérieure ($r < r_0$) de l'ilot. Cette équation fixe ici la valeur de Δ' et donc finalement la perturbation magnétique pour des conditions aux limites données.

Pour étudier le mouvement d'entraînement de la matière par l'ilot, c'est-à-dire la rotation de l'ilot autour du grand axe, nous avons à évaluer la vitesse moyenne de l'assemblée des ions. Nous nous plaçons donc dans le repère associé à l'ilot et tournant autour du grand axe à la vitesse v_I . Deux situations physiques sont possibles :

i) τ^{-1} et $\frac{\delta^2}{D} < v_{ti}/L$

où δ et L sont les largeur et longueur de l'ilot, D est le coefficient de diffusion des ions. C'est-à-dire, soit une évolution lente de l'ilot comparée au temps de mise en équilibre de l'assemblée ionique, soit un temps de diffusion plus long et qu'ainsi l'assemblée ionique puisse toujours être considérée en équilibre avec une densité n_i et une température T_i constante sur chaque surface magnétique.

ii) La situation inverse τ^{-1} ou $\frac{\delta^2}{D} > \nu_{ii}/L$

Dans cette deuxième situation la densité et la température des ions sont peu perturbées par l'ilot et sont par conséquent distribuées selon des profils $n(r)$, $T_i(r)$. L'équilibre des électrons impose un potentiel électrostatique Ψ tel que :

$$-T_e \nabla_{//} n - e_e \nabla_{//} \Psi = 0$$

$$\Psi = -\frac{T_e}{e_e} \log n + f(K)$$

la vitesse $\vec{v}_i$ des ions s'écrit alors :

$$\vec{v}_i = \alpha \vec{B} + \vec{v}_d \qquad (87)$$

où $\vec{v}_d$ vérifie :

$$n_i e_i \frac{\vec{v}_d \times \vec{B}}{c} = \vec{\nabla} p_i + n_i e_i \vec{\nabla} \Psi \qquad (p_i = n_i T_i)$$

$$= \vec{\nabla} p_i - \frac{e_i}{e_e} T_e \vec{\nabla} n$$

c'est-à-dire, en multipliant vectoriellement par $\vec{B}$:

$$\vec{v}_d = -\frac{c}{n_i e_i B^2} \left(\vec{\nabla} p_i \times \vec{B} - \frac{e_i}{e_e} T_e \vec{\nabla} n \times \vec{B} \right)$$

Pour déterminer la constante α (87) remarquons qu'un mouvement dans le sens de θ de l'assemblée des ions est rendu difficile par la friction engendrée par les miroirs magnétiques en r/R rencontrés tous les $\Delta\theta = 2\pi$ lors d'un tel mouvement d'ensemble. Seul un mouvement toroïdal dans la direction e_φ est facile, c'est-à-dire $\vec{v}_i \times \vec{e}_\varphi \neq \vec{0}$:

$$\alpha B_\theta - \frac{1}{n_i e_i B^2} \left(-\frac{\partial p_i}{\partial r} B_\varphi + \frac{e_i}{e_e} T_e \frac{\partial n}{\partial r} B_\varphi \right) \neq 0$$

Ceci détermine α et donne finalement la vitesse des ions dans le repère de l'ilot :

$$\vec{v_i} \# - \frac{1}{m_i e_i B_\theta} \left(\frac{\partial p_i}{\partial r} - \frac{e_i}{e_e} T_e \frac{\partial n}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi$$

Bien sûr dans la première situation où l'équilibre de l'assemblée est assuré à chaque instant, les gradients précédents sont nuls à l'intérieur de l'ilot et alors $\vec{v_i} = \vec{0}$, il n'y a pas de rotation possible des ilots par rapport à l'assemblée des ions.

Il résulte de ce qui précède que les ilots tendent à prendre une vitesse autour de l'axe principal égale à la vitesse des ions au voisinage (à un effet diamagnétique près dans la deuxième situation). Nous allons maintenant préciser ce résultat dans la première situation physique où les ions comme les électrons sont en équilibre dans l'ilot. Nous considérons un système de variables angulaires et d'action adapté à la présence des ilots magnétiques au sein du plasma. Nous prenons donc comme configuration de base le champ $B_o = cte$ augmenté de la perturbation (83) qui crée les ilots où nous prendrons pour simplifier l'entier ℓ égal à - 1, et ajouterons à ce champ de base la perturbation $\delta B = B_o (r/R) \cos\theta$. Les trajectoires des particules dans la configuration de base (toutes circulantes), se divisent en deux groupes ; les particules à l'extérieur de l'ilot (vers l'extérieur du tore et vers l'axe magnétique) où la topologie normale des lignes de flux est préservée pour lesquelles nous gardons le système habituel de variable angulaire et d'action corrigé cependant en ce qui concerne la variable ϕ_2 que nous prendrons maintenant de la forme :

$$\phi_2 = \theta + \frac{1}{\ell} G(K, u) \qquad\qquad u = \ell\theta + m\varphi$$

la correction $G(K, u)$ sera définie plus loin mais nous pouvons remarquer dès à présent que cette correction sera négligeable pour des valeurs de ℓ suffisamment grandes. La deuxième classe de particules est constituée des particules piégées dans l'ilot (cet ilot est unique, ℓ grands tours pour 1 petit tour) pour lesquelles nous constituons le système de variables angulaires et d'actions :

$$J_1 , \phi_1 \quad \text{habituels}$$

$$J_2 = \frac{e}{2\pi c} \psi_T \quad , \quad \phi_2 = G(K, u)$$

$$J_3 = \frac{e}{2\pi c} \psi_H + \ell R m v_\parallel \quad , \quad \phi_3 = \varphi/\ell = \theta$$

où $\phi_T = S(K).B$, $S(K)$ est l'aire transversale délimitée par la surface magnétique (84) spécifiée par la constante K .
Il apparaît d'autre part que

- à l'extérieur de l'ilot : $K > |b|$

$$G(K,u) = 2\pi \frac{\int du/\sqrt{K-b\cos u}}{\oint du/\sqrt{K-b\cos u}} - u$$

- à l'intérieur de l'ilot : $K < |b|$

$$G(K,u) = 2\pi \frac{\int du/\sqrt{K-b\cos u}}{\oint du/\sqrt{K-b\cos u}}$$

Nous nous plaçons dans le repère où l'ilot est immobile. L'équilibre des électrons impose que le potentiel électrique soit constant sur chaque surface magnétique : $\Psi = \Psi(V) = \Psi(K)$. Nous introduisons dans chaque domaine la fonction de distribution $f(J)$ pour les ions sous la forme :

$$f(J) = \frac{\nu(J_2, J_3)}{(2\pi m T^{3/2})} \exp - \frac{h}{T}$$

où la fonction $\nu(J)$ vérifie :

$$\nu(\Psi_T, \Psi_p) = n(V) \exp - \frac{e\Psi(V)}{T}$$

de sorte qu'à l'extérieur de l'ilot :

$$\frac{\partial \nu}{\nu \partial J_3} - \frac{1}{q} \frac{\partial \nu}{\nu \partial J_2} = \frac{2\pi c}{e} \left(\frac{\partial m}{m \partial \Psi_p} + \frac{e}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_p} \right) \qquad (88)$$

$\partial m/m\partial\Psi_p$ étant le profil de densité imposé à l'extérieur. Appelant C la quantité $f\partial\nu/\nu\partial J_3$ dans l'ilot et $\partial\nu/\nu\partial J_3$ en dehors, cette variable C , fonction de K , est reliée à la vitesse moyenne v_i des particules autour du grand axe par la relation :

$$v_i = C\,T\,R$$

Lorsque nous appliquons la perturbation δH associée à la perturbation

$\delta B = B_0 (r/R) \cos\theta$, il apparaît alors une production d'entropie donnée par (34) qui, compte tenu de (88) prend la forme :

$$\iint_{Ilot} \mathcal{A}_I \underline{C}^2 \ell\, 2\pi R\, d_2 x + \iint_{Ext} \mathcal{A}_E \left[\underline{C} - \frac{2\pi c}{e} \left(\frac{\partial n}{n \partial \Psi_p} + \frac{e}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_p} \right) \right]^2 2\pi R\, d_2 x$$

où

$$\mathcal{A}_I = \int \ldots I(\omega) \frac{1}{\ell^2} \delta\left(\frac{v_\parallel}{qR}\right) n \exp - \frac{v^2}{v_{th}^2} \cdot \frac{1}{(\pi v_{th}^2)^{3/2}} d_3 v$$

$$\mathcal{A}_E = \int \ldots q^2 I(o) \delta\left(\frac{v_\parallel}{qR}\right) n \exp - \frac{v^2}{v_{th}^2} \frac{1}{(\pi v_{th}^2)^{3/2}} d_3 v$$

où $I(\omega)$ est donné par (35) ou (36) suivant que les ions sont en régime Plateau ou banane. Ajoutant encore l'effet de viscosité, il s'ensuit que le champ de vitesse C et le potentiel Ψ sont les valeurs de $\underline{C}$ et de $\underline{\Psi}$ qui rendent extremum :

$$\delta \mathcal{W} = \iint \chi \left(\frac{\partial \underline{C}}{\partial K} \right)^2 (\vec{\nabla} K)^2\, 2\pi R\, d_2 x + \iint_{\ell \text{ Sections des Ilots}} \mathcal{A}_I \underline{C}^2\, 2\pi R\, d_2 x$$

$$+ \iint_{Ext} \mathcal{A}_E \left[\underline{C} - \frac{2\pi c}{e} \left(\frac{\partial n}{n \partial \Psi_p} + \frac{e}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_p} \right) \right]^2 2\pi R\, d_2 x$$

où le coefficient χ introduit ici s'exprime en fonction du coefficient de viscosité habituel χ_ν par :

$$\chi = \chi_\nu T R^2$$

Nous supposerons dans la suite que χ est une constante dans tout le plasma.

La minimisation de $\delta \mathcal{W}$ par rapport à $\partial \underline{\Psi} / \partial \Psi_p$ fournit à l'extérieur la valeur de $\partial \Psi / \partial \Psi_p$ en fonction de $\underline{C}$:

$$\frac{2\pi c}{e} \left(\frac{\partial n}{n \partial \Psi_p} + \frac{e}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_p} \right) = \underline{C}$$

Il ne reste alors à minimiser que les termes :

$$\delta \mathcal{W} = \iint \chi \left(\frac{\partial \underline{C}}{\partial K} \right)^2 (\vec{\nabla} K)^2\, 2\pi R\, d_2 x + \iint_{\ell \text{ ilots}} \mathcal{A}_I \underline{C}^2\, d_2 x \times 2\pi R \qquad (89)$$

En introduisant la variable régulière K qui caractérise chaque surface magnétique perturbée (84), les intégrales $\iint d_2 x$ peuvent être écrites :

$$\iint_{K,\,K+dK} d_2x = \int g(K)\,dK \qquad ;\ g(K) = \frac{r_0}{2}\oint \frac{du}{\sqrt{K - b\cos u}}$$

$$\iint_{K,\,K+dK} (\vec{\nabla}K)^2\, d_2x = \int f(K)\,dK \qquad ;\ f(K) = \frac{r_0}{2}\oint 4\sqrt{K - b\cos u}\ du.$$

Commençons par calculer la valeur de $\underline{\zeta}$ à l'extérieur de l'ilot, compatible avec une valeur $\underline{\zeta}_s$ à la séparatrice. Seul le premier terme de (89) est à prendre en compte pour des valeurs de $K > b$.

$$d(\delta\dot{d}\dot{b}) = \chi \int \frac{\partial \underline{\zeta}}{\partial K}\,\frac{\partial(\delta\underline{\zeta})}{\partial K}\,f(K)\,dK = 0$$

c'est-à-dire $(\partial\underline{\zeta}/\partial K)\,f(K) = A$ où A est une constante ne dépendant pas de K ; cette constante est déterminée dans les deux domaines extérieurs à l'ilot vers l'extérieur du plasma $(r \gg r_0)$ et vers l'intérieur du plasma $(r \ll r_0)$, par l'expression de $f(K)(\partial\underline{\zeta}/\partial K)$ loin de l'ilot :

$$A = f(K)\,\frac{\partial \underline{\zeta}}{\partial K} = 2\pi r_0\,\frac{\partial \underline{\zeta}}{\partial K}$$

Si $A_e = 2\pi r_0\,(\partial\underline{\zeta}/\partial r)_{r\gg r_0}$ et $A_i = 2\pi r_0\,(\partial\underline{\zeta}/\partial r)_{r\ll r_0}$, il vient alors :

$$\delta\dot{d}\dot{l}_{Ext} = \chi\int_{Ext}\left(\frac{\partial\underline{\zeta}}{\partial K}\right)^2 f(K)\,dK = \chi\left\{\left[\underline{\zeta}\,\frac{\partial\underline{\zeta}}{\partial K}\,f(K)\right]_{Sep.}^{r\gg r_0} + \left[\underline{\zeta}\,\frac{\partial\underline{\zeta}}{\partial K}\,f(K)\right]_{r\ll r_0}^{Sep}\right.$$

$$\delta\dot{d}\dot{l}_{ext} = \chi\ \underline{\zeta}_s\,[A_e - A_i]$$

$\underline{\zeta}_s$ étant la valeur de $\underline{\zeta}$ sur la séparatrice.
En développant au premier ordre la fonction $\underline{\zeta}(K)$ à l'intérieur de l'ilot sous la forme :

$$\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_s + \underline{\zeta}'(K - K_s)$$

K_s étant la valeur de K à la séparatrice : $K_s = +b$ (cf. équation (84)), nous obtenons :

$$\delta\dot{d}\dot{l}_{Int} = \chi\,\underline{\zeta}'^2\,\alpha + \mathcal{B}_I\left(\beta\,\underline{\zeta}_s^2 + 2\gamma\,\underline{\zeta}_s\,\underline{\zeta}' + \delta\,\underline{\zeta}'^2\right)$$

où

$$\alpha = \int_{-b}^{+b} f(k)\,dk = 10{,}1\,.\,r_0\,b^{3/2} \qquad \gamma = \int_{-b}^{+b} (k-b)\,g(k)\,dk = 5\,r_0\,b^{3/2}$$

$$\beta = \int_{-b}^{+b} g(k)\,dk = 5{,}7\,.\,r_0\,b^{1/2} \qquad \delta = \int_{-b}^{+b} (k-b)^2 g(k)\,dk = 6{,}5\,r_0\,b^{5/2}$$

Minimisant par rapport à $\underline{\zeta}'$ on obtient alors :

$$\delta \dot{\mathcal{W}}_{int} = \frac{\mathcal{R}_I \beta \alpha \chi + \mathcal{R}_I^2 (\beta\delta - \gamma^2)}{\alpha\chi + \mathcal{R}_I \delta} \underline{\zeta}_s^2 = \Upsilon \underline{\zeta}_s^2$$

(Pour de petite ilots Υ se réduit à $\Upsilon = \mathcal{R}_I \,.\, \beta$). La fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{W}}$ s'écrit alors :

$$\delta \dot{\mathcal{W}} = \delta \dot{\mathcal{W}}_{ext} + \delta \dot{\mathcal{W}}_{int} = \chi\, \underline{\zeta}_s (A_e - A_i) + \Upsilon \underline{\zeta}_s^2$$

Le terme $A_e - A_i$ est donné par la rotation du plasma de part et d'autre de l'ilot, la valeur de ζ_s sera donc obtenue par la minimisation de $\delta\dot{\mathcal{W}}$ par rapport à $\underline{\zeta}_s$ ainsi :

$$\zeta_s = -\chi \frac{(A_e - A_i)}{2\Upsilon}$$

La présence de l'ilot impose donc une condition aux limites à la rotation du plasma de part et d'autre de l'ilot :

$$\zeta_s = -\frac{\chi}{2\Upsilon} (2\pi r_0) \left[\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right] \qquad (90)$$

où $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right]$ est la discontinuité de $\partial\zeta/\partial r$ de part et d'autre de l'ilot.

Nous pouvons réécrire le résultat précédent de la façon suivante. La présence de l'ilot magnétique se déplaçant dans la direction toroïdale à la vitesse $-\zeta_s RT = (v_I - v_i)$ par rapport à l'assemblée des ions induit une production d'entropie de la forme (81) :

$$\frac{2\Upsilon}{R^2 T^2} (\underline{v}_I - \underline{v}_i)^2 \times 2\pi R$$

qui se superpose à la production d'entropie due à la viscosité, calculée comme si l'ilot était absent :

$$\frac{1}{T}\iiint \chi_v \left(\frac{\partial v_i}{\partial r}\right)^2 d_3x$$

la minimisation de la somme de ces deux termes par rapport à v_i conduit en effet à l'équation (90). Nous retrouvons la formulation (82) en ayant montré au passage que la production d'entropie due à la vitesse relative ion-ilot résultait de l'effet de miroir magnétique en r/R rencontré par les ions dans leur mouvement le long de l'ilot.

3) Application : Mise en rotation du plasma à l'aide d'ilots magnétiques

Nous étudions au paragraphe suivant les effets bénéfiques sur un plasma Tokamak que l'on peut attendre de la mise en rotation de la matière autour du grand axe. Nous nous posons alors la question ici de savoir si une telle mise en rotation ne pourrait être obtenue par l'action d'une perturbation magnétique, imposée de l'extérieur du plasma, créant sur une surface magnétique déterminée un ilot magnétique qui "accrocherait" l'assemblée des ions présents sur cette surface. La formule (90) permet de calculer l'amplitude minimum de l'ilot, nécessaire à cette mise en rotation. Supposant la viscosité constante, le profil de vitesse de la matière est donné à l'extérieur et à l'intérieur de l'ilot par :

$$v_i = v_{io} \left| \frac{\text{Log } r/r_L}{\text{Log } r_o/r_L} \right| \qquad \text{à l'extérieur}$$

$$v_i = v_{io} \qquad \text{à l'intérieur}$$

où l'on a imposé $v_i = 0$ au niveau de la paroi de la chambre à vide $(r = r_L)$ La vitesse v_{io} est la vitesse des ions au voisinage de l'ilot situé sur la surface magnétique de rayon $r = r_0$. Utilisant alors (90) il vient :

$$v_{io} - v_I = \frac{\pi \chi}{Y} \cdot \frac{v_{io}}{|\text{Log } r_o/r_L|}$$

v_I étant la vitesse de l'ilot, imposée par la perturbation magnétique extérieure. Il y aura mise en rotation effective du plasma à la vitesse v_I de l'ilot si :

$$|v_{i\theta} - v_z| \ll v_I$$

c'est-à-dire si :

$$\chi / Y \ll |\mathrm{Log}\, r_0/r_c| / \pi \qquad (91)$$

En reprenant la valeur de Y dans le cas d'assemblée d'ions dans le régime banane

$$Y = \theta_z \beta = 0{,}7 \cdot r_0 \delta \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} \sqrt{q}\, R^2 \gamma_{HH} m_H m_H^2 \nu_{H,H}^2$$

et en réintroduisant le coefficient de viscosité χ_v habituel, l'équation (91) entraîne :

$$\delta \gg 1{,}3 \frac{\pi \chi_v}{|\mathrm{Log}\, r_0/r_c|} \left(m_H r_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} \sqrt{q}\, \gamma_{HH} m_H \right)^{-1} \qquad (92)$$

$\delta = 2\sqrt{2b}$ où b a été défini en (84).

cette condition sur l'épaisseur δ de l'ilot entraîne à son tour une condition sur l'amplitude minimale de la perturbation qu'il faut imposer sur la surface résonante r_0 pour entraîner le plasma.

Il nous reste à vérifier si les courants au bord du plasma à la vitesse de phase ω/m dans le sens φ , qui induisent les ilots magnétiques, sont effectivement capables de faire apparaître ces derniers bloqués en phase. Cette question est analogue au problème évoqué à la fin du paragraphe 1. Le critère présenté conduirait dans le cas actuel à admettre que le bloquage en phase est réalisé si :

$$\Delta E > \dot{S}\, T_i / \omega$$

où ΔE est la différence des énergies magnétiques lorsque le blocage en phase n'apparaît pas et que les conditions aux limites imposent un régime MHD jusqu'à la surface résonante sans ilots et sans rotation de l'assemblée des ions, et lorsqu'au contraire les ilots et le blocage des phases apparaissent ; $\dot{S}$ est la production d'entropie dans ce deuxième cas. En fait ce critère est équivalent à exprimer que le flux radial du tenseur de Maxwell $T_{ij} = \frac{B_i B_j}{4\pi} - B^2 \frac{\delta_{ij}}{8\pi}$ dans la direction φ peut compenser le flux radial de quantité de mouvement dû à la viscosité. Si au bord du plasma, la

perturbation magnétique radiale a une amplitude maximum b_r , le flux du tenseur de Maxwell dans la direction φ , donné par :

$$\delta B_\varphi \, \delta B_r / 4\pi$$

où δB_φ et δB_r sont reliés par les équations :

$$B_\varphi \, \delta B_\varphi + B_\theta \, \delta B_\theta = 0$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta B_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \, \delta B_r) = 0$$

a comme valeur minimum :

$$\frac{1}{4\pi} \frac{B_\theta}{B_\varphi} \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial r} (r \, \delta B_r) \, \delta B_r \simeq \frac{r}{qR} \frac{b_r^2}{2} \frac{1}{4\pi}$$

compte tenu de ce que δB_r varie approximativement comme $r^{\ell-1}$.
La mise en rotation du plasma nécessite donc que :

$$\frac{r}{Rq} \frac{b_r^2}{8\pi} \gg \chi_v \, v_{i\,o} \frac{1}{r_L} \left| \mathrm{Log}\, r_o / r_L \right| \qquad (93)$$

Nous donnerons dans le prochain paragraphe les ordres de grandeurs des champs magnétiques et des puissances requises pour mettre ainsi le plasma en rotation, après avoir étudié les effets bénéfiques que l'on pourrait tirer d'une telle rotation.

B.IV - PHENOMENES DE TRANSPORT ET STABILITE DANS UN PLASMA TOKAMAK EN ROTATION

Nous vous proposons ici d'étudier quelques effets de la rotation du plasma autour du grand axe, toujours à l'aide des principes variationnels simplifiés. Successivement nous étudions les phénomènes de transport, où il apparaît un effet certain de purification du plasma en impuretés lourdes, la stabilité qui peut être nettement améliorée en ce qui concerne les modes dus aux ions piégés enfin quelques moyens de mettre le plasma en rotation, moyens qui viennent compléter l'utilisation des ilots magnétiques que nous venons de voir.

1) Transport des ions légers en présence de rotation

Nous supposons donc le plasma en rotation autour du grand axe de la machine ; nous plaçant au voisinage d'une surface magnétique de rayon r, nous définissons un repère où le champ électrique radial est nul, ce repère tourne alors à la vitesse $\Gamma(r)$ autour du grand axe. Dans ce repère nous définissons les mêmes variables angulaires et d'action que précédemment (cf. paragraphe B.I), et les mêmes fonctions $f_H(J)$ régulières pour l'assemblée des ions hydrogènes. L'équilibre thermodynamique de la densité doit tenir compte du potentiel gravitationnel $G(r) = - m_H \Gamma^2(r) R^2/2$ dû à la rotation ainsi que d'une perturbation $\delta\Psi$ du potentiel électrique dû à la rotation différentielle du plasma, la densité s'écrit donc :

$$n_H(r,\theta) = A \exp\left(\frac{m_H \Gamma^2 R^2}{2T} - \frac{e\delta\Psi}{T} - \frac{e\Psi(r)}{T} \right)$$

$$n_H(r,\theta) \simeq A' \exp\left(\frac{r}{R_0} \frac{m_H \Gamma^2(r) R_0^2}{T} \cos\theta - \frac{e\delta\Psi}{T} - \frac{e\Psi}{T} \right)$$

Notons tout de suite que les électrons, à cause de leur très faible inertie, ne sont pas sensibles à la rotation du plasma et que la neutralité du plasma détermine alors $\delta\Psi$:

$$n_H(r,\theta) = n_e(r,\theta)$$

$$n_e(r,\theta) = A' \exp\left(\frac{e\delta\Psi}{T} + \frac{e\Psi}{T}\right)$$

$$n_H(r,\theta) \simeq A' \exp -\left(\frac{r}{R}\,\frac{m_H \Gamma^2(r) R_0^2 \cos\theta}{2T} - \frac{e\Psi}{T}\right)$$

Pour calculer les coefficients de transport des ions légers, nous pouvons alors appliquer la même méthode qu'au paragraphe (B.II.1) en remplaçant dans $\delta d\dot{\delta}_R$ la perturbation $\mu\delta B$ de l'Hamiltonien par la perturbation $\mu\delta B + e\delta\Psi + m_H \Gamma^2 R_0 r\cos\theta$. Il n'y aura donc que très peu de changement si, comme nous le supposerons dans la suite $\Gamma^2(r) R_0^2 \ll v_{th,H}^2$, c'est-à-dire dans le cas de vitesses de rotation faibles devant la vitesse thermique.

En revanche, du fait de la rotation différentielle du plasma, les forces de viscosité jouent un rôle non négligeable. Nous devons calculer dans ce cas le coefficient de viscosité de l'assemblée des ions H. Nous prenons comme fonction régulière pour notre assemblée :

$$f_H = \frac{\nu(J_2, J_3, h)}{(2\pi m\, \tau(J_2))^{3/2}} \exp -\frac{h}{\tau(J_2)}$$

où $h = \mu B_0 + m_H v_{\parallel}^2/2$. Tenant compte du mouvement de l'assemblée autour du grand axe à la vitesse moyenne $v_0 = \Gamma R$, l'Hamiltonien H s'écrit :

$$H = h + e\Psi(J_2, t) + (m_H v_{\parallel} v_0/T) + \delta H$$

δH étant ici encore la perturbation $\delta H = \mu B_0 \frac{r}{R}\cos\theta$.
et alors, en mettant f_H sous la forme $f_H = A \exp -\frac{h - U_H}{T}$ il vient pour U_H :

$$U_H = T\left(\operatorname{Log}\nu_H - \frac{3}{2}\operatorname{Log}\tau + \left(\frac{h}{T} - \frac{h}{\tau}\right)\right)$$

$$\nu_H\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T, \frac{e}{2\pi c}\Psi_P, h\right) = n(V) \exp -\frac{e\Psi}{T} \exp -\frac{m_H v_{\parallel} v_0}{T}$$

$v_{\parallel}$ s'exprime en fonction de J_2 et J_3 , à l'ordre 1 en (r/R) (cf. paragraphe B.I)

$$v_{\parallel} \simeq v_{\varphi} = (J_3 - G(J_2))(1/m_H R_0)$$

où nous avons introduit : $\frac{e_\alpha}{2\pi c}\Psi_P = f^{-1}(.\Psi_T)\frac{e_\alpha}{2\pi c} = \frac{e_\alpha}{2\pi c} f^{-1}\left(\frac{2\pi c}{e_\alpha} J_2\right) = G(J_2)$.

Pour la fonction $\underline{U}_H$, nous choisirons comme fonctions d'essai $\underline{\nu}$, $\underline{\tau}$, $\underline{\Psi}$ et $\underline{v}_o$. La fonctionnelle $\dot{\mathcal{W}}(\underline{U}_H)$ à minimiser est donnée ici par :

$$\dot{\mathcal{W}}(\underline{U}) = \dot{\Sigma} + \dot{S}(\underline{U}_H) + \delta\dot{\mathcal{W}}_R + \delta\dot{\mathcal{W}}_b$$

le terme $\delta\dot{\mathcal{W}}_b$ venant ici de la production d'entropie due à la viscosité en dehors de la surface r où nous nous plaçons. Nous pouvons commencer à extrémaliser $\dot{S}(\underline{U}_H)$ qui donne (cf. paragraphe B.II) :

$$\frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_3} = \frac{\underline{v}_o}{RT} = C(J_2) \qquad (94)$$

En fonction de $C(J_2)$ la fonction $\mathrm{Log}\,\nu_H$ s'écrit :

$$\mathrm{Log}\,\nu_H = \mathrm{Log}\,n_o(J_2) - \frac{e\Psi(J_2)}{T} + C(J_2)\,(J_3 - G(J_2))$$

et la fonction $\underline{U}_H$ s'écrit alors, en développant à l'ordre r/R autour de la surface magnétique (Ψ_T, Ψ_P) :

$$\frac{\underline{U}_H}{T} = \mathrm{Log}\,\underline{\nu}_H(\Psi_P, \Psi_T) + C(\Psi_P)\,R m_H v_\varphi - \left(\frac{\partial \underline{\nu}_H}{\underline{\nu}_H \partial J_2}\right) qr\, m_H v_{//} \cos\theta - \left(\frac{\partial \underline{C}}{\partial J_2}\right) Rrq\, m_H^2 v_\varphi v_{//} \cos\theta$$

$$+ \mathrm{Log}\,\underline{\tau}(\Psi_T, \Psi_P) - \left(\frac{h}{\underline{\tau}} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\partial \underline{\tau}}{\underline{\tau}\,\partial J_2}\right) qr\, m_H v_{//} \cos\theta + \ldots$$

Une fois $\dot{S}(\underline{U}_H)$ extrémalisé, nous extrémalisons le terme $\delta\dot{\mathcal{W}}_R$, il apparaît alors que la valeur extrémale de $\delta\dot{\mathcal{W}}_R$ ne contient qu'un terme en $(\partial\underline{\tau}/\underline{\tau}\,\partial J_2)$ qui ne nous interessera pas dans le calcul de la viscosité, nous négligerons donc cette fonctionnelle dans la suite. Il reste alors :

$$\dot{\mathcal{W}}(\underline{U}) = \dot{\Sigma} + \dot{S}(\underline{U}_H) + \delta\dot{\mathcal{W}}_b(\underline{U}_H)$$

où la fonctionnelle $\dot{\Sigma}$ s'écrit après quelques transformations :

$$\dot{\Sigma} = 2\int -\left(\frac{\partial n_H}{\partial t}\mathrm{Log}\,\underline{n}_H + \frac{3}{2}\frac{n_H}{T}\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{Log}\,\underline{T}\right) dV + 2\int \frac{\partial}{\partial t}(n_H C T)\, m_H R^2 \underline{C}\, dV$$

$$\delta\dot{\mathcal{W}}_b = \dot{S}\left(\underline{U}_H + \frac{\partial \underline{U}}{\partial J_2}\cdot\frac{\delta H}{\Omega}\right) - \dot{S}(\underline{U}_H)$$

Pour avoir l'équation d'évolution de C , nous extrémalisons la fonctionnelle $\dot{\mathcal{W}}(\underline{U})$ par rapport à $\underline{C}$; seuls sont à retenir alors les termes :

$$2\int \frac{\partial}{\partial t}(n_H C T)\, m_H R^2 \underline{C}\, dV + \dot{S}\left(\underline{U}_H + \frac{\partial \underline{U}}{\partial J_2}\cdot\frac{\delta H}{\Omega}\right)$$

Le second terme s'écrit, en ne tenant compte que des termes de parité paire en $v_{//}$ (les autres s'éliminerons dans les intégrations à venir) :

$$\dot{S}\left(\underline{U}_H + \frac{\partial \underline{U}}{\partial J_2} \cdot \frac{\delta H}{\Omega}\right) = \dot{S}\left(-T \frac{\partial C}{\partial J_2} \cdot R q r m_H^2 v_{//}^2 \cos\theta + T \frac{\partial C}{\partial J_2} R m_H v_{//} \cdot \frac{\left(-\frac{r}{2R} m_H v_\perp^2\right)\cos\theta}{v_{//}/qR}\right)$$

$$= \dot{S}\left(T\left(\frac{\partial C}{\partial J_2}\right) m_H^2 R q r \left(-v_{//}^2 - \frac{1}{2} v_\perp^2\right)\cos\theta\right)$$

qui compte tenu de (3), (4) s'écrit aussi :

$$\dot{S}\left(\underline{U}_H + \frac{\partial \underline{U}}{\partial J_2} \cdot \frac{\delta H}{\Omega}\right) = \dot{S}\left(T\left(\frac{\partial C}{\partial J_2}\right) R m_H^2 q r \frac{v_{//}^2}{2} \cos\theta\right)$$

Après intégration dans l'espace des vitesses et minimisation par rapport à $\underline{C}$ il vient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0{,}11 \frac{\rho_{qR,H}^2 q^2}{\tau_{HH}} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\right)$$

Soit encore $\partial v_\theta/\partial t = \chi_v (\partial^2 v_\theta/\partial r^2)$. Le coefficient de viscosité est donc de la forme Pfirsch Schlüter [30], $\chi_v = 0{,}11 (\rho_{qR,H}^2 q^2)/\tau_{HH}$.
Ce résultat peut être affiné par un calcul complet tenant compte des interactions de l'assemblée H avec les assemblées des impuretés. Le calcul est compliqué si nous prenons l'assemblée Z dans un régime collisionnel de Pfirsch Schlüter mais le résultat étant déjà de cette forme, nous aurons une bonne approximation en traitant, avec notre formalisme, l'assemblée des impuretés comme si elle était en régime Banane (Zakharov - Karpman), on trouve alors :

$$\chi_v = 0{,}11 \frac{\rho_{qR,H}^2 q^2}{\tau_{HH}} \left(1 + Z_{eff} \frac{n_Z}{n_H}\left(\frac{m_Z}{m_H}\right)^{3/2} + 0{,}6 Z_{eff} \frac{m_H}{m_Z} + 1{,}5 \frac{n_Z m_Z}{n_H m_H}\right)$$

avec : $Z_{eff} = n_Z Z^2/n_H$.

2) Transport néoclassique des impuretés

Les impuretés, du fait de leur masse élevée sont très sensibles au potentiel gravitationnel imposé par la rotation. Celui-ci tend à concentrer les impuretés sur chaque surface magnétique, au voisinage du demi plan équatorial extérieur $(\theta \sim 0)$. Pour envisager un mouvement autour de l'axe magnétique, ces ions devraient alors, de façon à conserver le flux de particule, avoir des vitesses très grandes dans le demi plan équatorial intérieur $(\theta \sim \pi)$; cette contrainte rend ce mouvement difficile à établir et donc les impuretés peuvent être considérés comme étant au repos dans le repère où le champ électrique radial est nul ; ceci contraste avec la situation normale et la présence de la

rotation doit donc nettement modifier les flux d'impuretés.

Nous reprenons donc le calcul de la fonctionnelle $\dot{W}$, avec la même fonction de distribution $f_H = A \exp -(h \cdot U_H)/T$, incluant dans U_H la vitesse moyenne de rotation autour du grand axe mais omettant la vitesse de rotation différentielle responsable de la viscosité :

$$U_H = T\left(\log \nu_H(J_1,J_2) - \frac{3}{2}\log \tau(J_2) - h\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\tau(J_2)}\right)\right.$$

$$\nu_H\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T, \frac{e}{2\pi c}\Psi_p\right) = n_H(r)$$

$$\tau\left(\frac{e}{2\pi c}\Psi_T\right) = T(r)$$

L'assemblée des impuretés Z étant au repos, nous prendrons pour fonction de distribution f_Z :

$$f_Z = \frac{n_Z(r,\theta)}{(2\pi m_Z T)^{3/2}} \exp -\frac{m_Z v_Z^2}{2T}$$

avec $n_Z(r,\theta) = n_Z(r) \exp\left(m_Z \Gamma^2 R_0 r \cos\theta / 2T\right) = n_Z(r) \exp a\cos\theta = \tilde{n}_Z(r)\, I(a)$,

$\tilde{n}_Z(r)$ est la densité moyennée sur une surface magnétique de rayon r ;

$a = m_Z \Gamma^2 R_0 r / 2T$. La fonctionnelle $\dot{W}$ est donnée par :

$$\dot{W} = 2\int \left(\frac{\partial n_H}{\partial t}\log \underline{n}_H + \frac{3}{2}\frac{n_H}{T}\frac{\partial T}{\partial t}\log \underline{T}\right) dV + \dot{S}_{HH} + \dot{S}_{HZ} + \delta \dot{W}_R$$

où $\dot{S}_{HH}$ est la production d'entropie due aux collisions Hydrogène-Hydrogène. La minimisation à 0 de $\dot{S}_{HH}$ donne, comme d'habitude, l'égalité $\partial \nu_H / \nu_H \partial J_3 = C$. Le terme $\dot{S}_{HZ}$ est la production d'entropie due aux collisions Hydrogène-impuretés ; il s'écrit :

$$\dot{S}_{HZ} = \int \frac{1}{2}\frac{\rho_{H,H}^2}{\tau_{HH}}\frac{e^2 B_0^2}{c^2}\cdot \tilde{n}_Z(r)\, I(a)\, Z^2 R^2 \underline{C}^2\, dV$$

Enfin le terme $\delta \dot{W}_R$ dû à la perturbation résonante $\delta H = \left(m_H \Gamma^2 R_0^2 (r/R) + \mu B_0 \frac{r}{R}\right)\cos\theta$ s'écrit, en prenant l'assemblée H dans le régime de Zakharov et Karpman:

$$\delta \dot{W}_R = \int \ldots 1{,}38\, m_H^{3/2} q R \langle \delta v_\parallel^2 \rangle (\mu B_0)^{1/2}\left(1 + \frac{\Gamma^2 R_0^2}{v_\perp^2}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left\{ \underline{C} + \right.$$

$$\left.\left(\frac{2\pi c}{e}\right)\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \Psi_p} + \left(\frac{2\pi c}{e}\right)\left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial \underline{T}}{\underline{T}\partial \Psi_p}\right)^2 \delta(v_\parallel / qR)\, f_H\, dV\, d_3 v$$

Soit, en introduisant $b = n^2 R_0^2 / v_{th,H}^2$ et en tenant compte des collisions entre ions légers et ions lourds :

$$\delta \dot{W}_R = \int \cdots \frac{1,38 \times 3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\rho_{th,H}^2}{\tau_{HH}} \frac{e^2 B_0^2}{c^2} R^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} \left\{ \left(1+\frac{b}{x^2}\right)^{1/2} \left[\phi(x) - G(x)\right] + \frac{\hat{n}_z Z^2}{n_H} \left(1+\frac{b}{x^2}\right)^{1/2} \right\}$$

$$\left\{ \underline{C} + \left(\frac{2\pi c}{e}\right) \frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_p} + \left(\frac{2\pi c}{e}\right) \left(x^2 - \frac{3}{2}\right) \frac{\partial \underline{T}}{\underline{T} \partial \psi_p} \right\}^2 n_H \exp - x^2 \, x \, dx \, dV$$

la minimisation par rapport à $\underline{C}$ donne :

$$C = - \frac{\frac{3 \times 1,38}{\sqrt{2}} \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} \times \frac{2\pi c}{e}}{Z_{eff} + \frac{3 \times 1,38}{\sqrt{2}} \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} Z_1} \left[Z_1 \frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_p} + Z_2 \frac{\partial \underline{T}}{\underline{T} \partial \psi_p} \right]$$

où $Z_{eff} = n_z Z^2 / n_H$

$$Z_1 = \int_0^\infty \left\{ \left(1+\frac{b}{x^2}\right)^{1/2} \left[\phi(x) - G(x)\right] + Z_{eff} \left(1+\frac{b}{x^2}\right)^{1/2} \right\} \exp - x^2 \, x \, dx$$

$$Z_2 = \int_0^\infty \left\{ \left(1+\frac{b}{x^2}\right)^{1/2} \left[\phi(x) - G(x)\right] + Z_{eff} \left(1+\frac{b}{x^2}\right)^{1/2} \right\} \left(x^2 - \frac{3}{2}\right) \exp - x^2 \, x \, dx$$

On obtient alors :

$$\dot{W} = 2 \int - \left(\frac{\partial n_H}{\partial t} \log \underline{n}_H + \frac{3}{2} \frac{n_H}{T} \frac{\partial T}{\partial t} \log \underline{T} \right) dV +$$

$$\int - \frac{\rho_{th,H}^2}{2\tau_{HH}} n_H (4\pi^2 B_0^2 R^2) Z_{eff} \frac{1,3 \times 3}{\sqrt{2}} \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} Z_1 \left\{ \left(\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_p}\right)^2 + 2 \frac{Z_2}{Z_1} \left(\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_p}\right) \left(\frac{\partial T}{T \partial \psi_p}\right) + \cdots \right\} dV$$

Les flux étant ensuite calculés en minimisant $\dot{W}$ par rapport à $\underline{n}_H$ et deux situations se présentent :

a) $Z_{eff} > (r/R)^{1/2}$:

$$\phi_H = - Z \phi_z = - 0,75 \cdot X(b, Z_{eff}) \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \frac{q^2 \rho_{th,H}^2}{\tau_{HH}} n_H \left[\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} + \frac{Z_2}{Z_1} \frac{\partial T}{T \partial r} \right]$$

Par exemple pour des valeurs de b faible ; le coefficient numérique X est égal à $(0,6 + 1,3\ Z_{eff})$.

b) $Z_{eff} < (r/R)^{1/2}$:

$$\Phi_H = -Z\,\Phi_Z = -\frac{1}{2} q^2 \frac{\rho_{\theta,H}^2}{\tau_{HH}} Z_{eff}\, m_H \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} + \frac{Z_2}{Z_1}\frac{\partial T}{T \partial r}\right]$$

Remarquons que le coefficient Z_2 est négatif, le rapport $\alpha(b, Z_{eff}) = -Z_2/Z_1$ a le même type de dépendance en Z_{eff} que si les ions impuretés étaient en régime Banane [31] , allant de + 0,2 pour $Z_{eff} = 0$ à + 0,5 pour $Z_{eff} \gg 1$. La valeur de α croît aussi avec b, ce qui pourrait entraîner, grâce à la rotation, une inversion du flux d'impureté.

3) Diffusion turbulente des impuretés en présence de la rotation du plasma

La turbulence présente dans le plasma peut être caractérisée par un ensemble de modes électrostatiques que nous mettrons sous la forme :

$$\delta\Psi = \sum_{\ell,m,\omega} \Psi_{\ell,m,\omega}(\vec{x}) \exp(i\omega t + i\ell\theta + im\varphi)$$

Ces modes s' ajoutant au potentiel Ψ à l'équilibre responsable du champ électrique radial dans le plasma. Nous admettrons que $\Psi_{\ell,m,\omega}(\vec{x})$ est donné par :

$$|\Psi_{\ell,m,\omega}(\vec{x})|^2 = F_{\ell,m,\omega}(\omega + m\,\Omega_{E,\ell,m}\,,\ r - r_{\ell m})$$

où $r_{\ell m}$ est le rayon de la surface de résonance du mode $\Psi_{\ell,m,\omega}$, et où $\Omega_{E,\ell,m}$ est la valeur de $\Omega_E = -(c/RB_\theta)(\partial\Psi/\partial r)$ prise en $r = r_{\ell m}$. Des indications expérimentales[32,33] conduisent à admettre pour le spectre $F_{\ell,m,\omega}(\omega', r - r_{\ell m})$

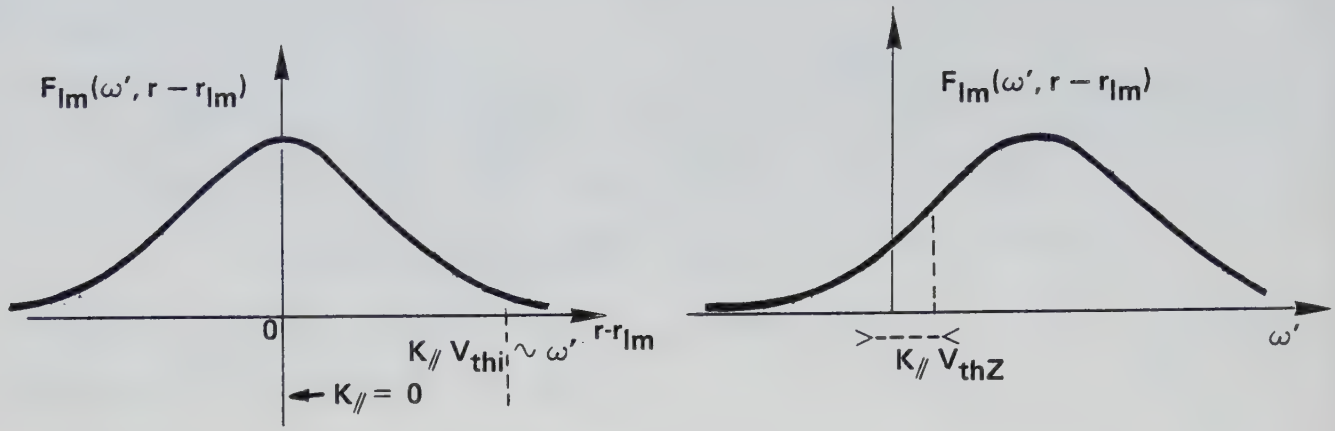


FIG 20 : Spectre $F_{lm}(\omega', r - r_{lm})$ de la turbulence

de la turbulence une allure donnée sur les figures (20). Il en résulte notamment que $F_{\ell,m,\omega}(\omega', r - r_{\ell m})$ est voisine de 0 dans le cone hachuré de la figure (21).

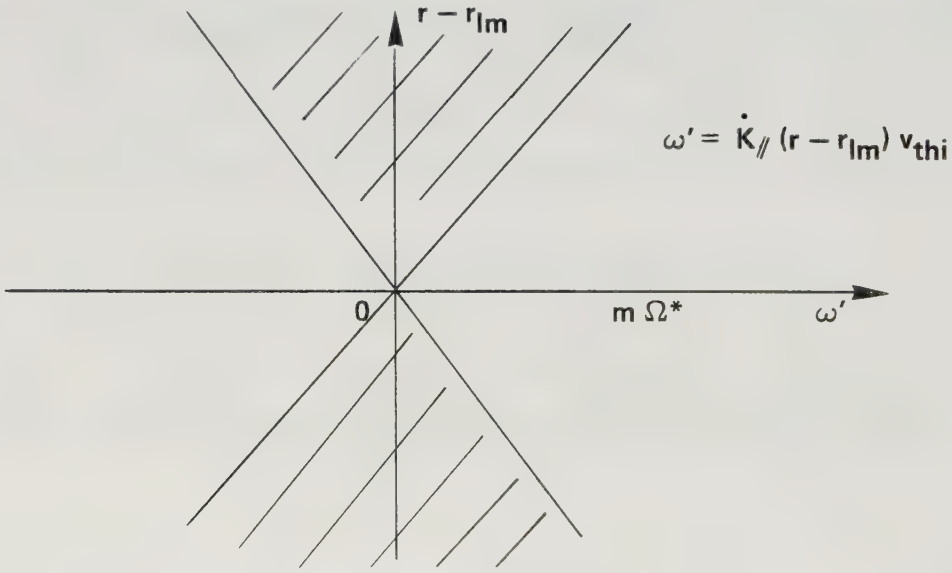


FIG 21 : Le cone hachuré correspond à des valeurs $\omega' > K_{//} v_{thi}$

En reprenant pour chaque assemblée des fonctions de distribution voisines d'une Maxwelienne sur chaque surface magnétique, nous pouvons former les termes élémentaires de production d'entropie de l'assemblée $\mathbf{Z}$ dus à chaque mode de la

turbulence, dans le régime Landau :

$$\delta \dot{W}_{\omega,\ell,m} = \frac{1}{T^2} \iint 2\pi Z^2 e^2 \left| \Psi_{\ell,m,\omega}(\vec{x}) \right|^2 \left\{ \omega + \ell T \left(\frac{\partial n_z}{n_z \partial r} + \frac{Ze}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial U}{T \partial r} \right) \frac{c}{Zer B} \right\}^2$$

$$\delta\left(\omega + K_{//} v_{//} + \ell T \left(\frac{Ze}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial U}{T \partial r} \right) \frac{c}{Zer B} \right) \frac{n_z}{\sqrt{\pi}\, v_{th\,z}} \exp\left(- \frac{v_{//}^2}{v_{th\,z}^2} \right) dv_{//}\, 2\pi R\, 2\pi r\, dr$$

expression dans laquelle :

. $U = - m_z \Gamma_{(r)}^2 R r \left(1 - Z \frac{m_H}{m_z} \right)$

. $\Omega = \omega + K_{//} v_{//} + \ell T \left(\frac{Ze}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial U}{T \partial r} \right) \frac{c}{Zer B}$ est la vitesse angulaire autour de l'axe principal du repère où le champ électrique radial est voisin de 0.

. $K_{//} = \frac{1}{R} \left(m + \frac{\ell}{q(r)} \right)$ $\qquad \left(K_{//} = 0 \quad \text{pour} \quad r = r_{\ell m} \right)$

Nous pouvons déjà effectuer l'intégration en $v_{//}$ et introduire les notations :

$$\underline{\Omega}^* = - \frac{T}{R} \frac{\partial n_z}{n_z \partial r} \frac{c}{Ze B_\theta}$$

$$\Omega_E = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{c}{R B_\theta}$$

$$\Omega_G = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{c}{Ze R B_\theta}$$

qui deviennent, au voisinage de la surface de résonance du mode

$$K_{//} = 0 + \dot{K}_{//} (r - r_{\ell m}) \qquad \text{avec} \quad \dot{K}_{//} = - \frac{1}{R} \frac{\dot{q}}{q^2} \ell$$

$$\Omega_E = \Omega_E(r_{\ell m}) + \dot{\Omega}_E (r - r_{\ell m})$$

ceci entraîne l'expression suivante de $\delta \dot{W}_{\omega,\ell,m}$:

$$\delta \dot{W}_{\omega,\ell,m} = \frac{1}{T^2} \int 2\pi Z^2 e^2 F_{\ell,m,\omega} \left(\omega + m \Omega_E(r_{\ell m}), r - r_{\ell m} \right) \left(\omega + m \left(\underline{\Omega}^* + \Omega_E + \Omega_G \right) \right)^2$$

$$\frac{n_z}{\sqrt{\pi}\, |K_{//}|\, v_{th\,z}} \exp - \left(\frac{\omega + m \Omega_E + m \Omega_G}{K_{//}^2 v_{th\,z}^2} \right) 2\pi R\, 2\pi r\, dr$$

Tous ces modes élémentaires créent des domaines piégés qui se recouvrent les uns les autres, à cause de la grande densité des valeurs de ℓ , m , ω . Nous pouvons donc appliquer les résultats de la théorie quasi-linéaire si la condition (31) est vérifiée ; elle s'écrit ici :

$$\langle \delta\Omega^2 \rangle^{4/3} = \left(K_{//} \langle \delta v_{//}^2 \rangle + \frac{v_{//}^2}{R^2} \left(\frac{\ell \dot{q}}{q^2} \right) \langle \delta r^2 \rangle \right)^{1/3} > \nu_{cz}$$

cette condition est vérifiée dès que $K_{//}$ est différent de 0 ; au voisinage de $K_{//} = 0$ c'est le second terme de $\langle \delta\Omega^2 \rangle^{4/3}$ qui assure la condition pour les valeurs usuelles des paramètre dans un Tokamak. Nous pouvons donc ajouter les contributions des modes élémentaires pour calculer la production d'entropie due à la turbulence dans l'assemblée Z. Commençons à regrouper les contributions dues à toutes les fréquences pour un mode ℓ, m donné :

$$\delta \dot{\mathcal{W}}_{\ell,m} = \int \delta \dot{\mathcal{W}}_{\ell,m,\omega} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{T^2} \iint Z^2 e^2 (2\pi) F_{\ell,m,\omega}(\omega', r - r_{\ell m}) \left(\omega' + m \dot{\Omega}_E \cdot (r - r_{\ell m}) + m \underline{\Omega}^* + m \Omega_G \right)^2$$

$$\exp - \frac{\left(\omega' + m \dot{\Omega}_E \cdot (r - r_{\ell m}) + m \Omega_G \right)^2}{K_{//}^2 \, v_{//z}^2} \frac{n_z}{\sqrt{\pi} K_{//} v_{//z}} \, 2\pi R \, 2\pi r \, dr \, d\omega'$$

c'est-à-dire, en ayant noté que l'exponentielle n'a des valeurs appréciables qu'au voisinage de $\omega' + m \dot{\Omega}_E \cdot (r - r_{\ell m}) + m \Omega_G = 0$:

$$\delta \dot{\mathcal{W}}_{\ell,m} = Z^2 e^2 \frac{2\pi}{T^2} A(r_{\ell m}) \, n_z(r_{\ell m}) \, 2\pi R \times 2\pi r_{\ell m} \, m^2 \, \underline{\Omega}^{*2}(r_{\ell m})$$

où nous avons posé :

$$A(r_{\ell m}) = \int F_{\ell,m} \left(- m \dot{\Omega}_E \cdot (r - r_{\ell m}) - m \Omega_G, r - r_{\ell m} \right) dr$$

Enfin en regroupant tous les modes pour toutes les valeurs possibles de ℓ et m et en notant de nouveau que l'abondance des modes ℓ , m possibles multiplie le nombre de surfaces de résonance $r_{\ell m}$:

$$\delta \dot{\mathcal{W}} = \sum_{\ell,m} \delta \dot{\mathcal{W}}_{\ell m}$$

$$\delta \dot{\mathcal{W}} = \frac{Z^2 e^2}{T^2} 2\pi R \int m^2 \, \underline{\Omega}^{*2}(r) \, A(r) \, 2\pi r \, dr$$

Il s'ensuit que le flux d'impureté du à la diffusion turbulente, que l'on calculerait en minimisant $d\dot{N} = \int \ldots (\partial n_z / n_z \partial t) \log \underline{n}_z \, d_3x + \delta d\dot{N}$ comme au paragraphe B.II, ne dépend que de $\Omega^*(r)$ c'est-à-dire de $(\partial n_z / \partial r)$, il n'est donc pas affecté par la rotation et reste faible par rapport au flux néoclassique. On ne peut attendre une différence notable que dans le cas où $m \dot{\Omega}_\varepsilon \gg \dot{k}_{//} v_{th\,i}$,c'est-à-dire si le cône de la figure (21), où la fonction $F_{\ell,m,\omega}(\omega', r - r_{\ell m})$ est voisine de 0, était très étroit ce qui entraînerait dans le calcul de $A(r_{\ell m})$ une dépendance en $\dot{\Omega}_\varepsilon$ et Ω_G . Cette condition n'est cependant atteinte que pour de très grandes valeurs de $\dot{\Omega}_\varepsilon$.

4) Etude de la stabilité du plasma en présence de rotation

Nous nous limiterons ici à l'étude de la stabilité linéaire du plasma vis-à-vis des ondes de dérives électrostatiques. Ecrivant ce mode électrostatique sous la forme :

$$\delta \Psi = \Psi_+(\vec{x}) \exp i\omega t + \text{c.c.}$$

On déduit du principe variationnel (53) (54) que le champ $\Psi_+(\vec{x})$ doit rendre extrémum la fonctionnelle :

$$\mathcal{L}(\Psi_+, \underline{\Psi}_+^*, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint |\vec{\nabla} \Psi_+|^2 d_3x - \sum_{\text{assemblées}} \iiint \sum_m n_R \frac{\partial f}{\partial J_R} \frac{h_m h_m^*}{\omega + n_R \frac{\partial h}{\partial J_R}} (2\pi)^3 d_3 J$$

où l'on a posé :

$$\sum_m h_m(J) \exp i m_R \phi_R = e \Psi_+(\vec{x})$$

$$\sum_m h_m^*(J) \exp -i m_R \phi_R = e \Psi_+^*(\vec{x})$$

Nous avions vu au paragraphe A.V qu'à son extrémum, cette fonctionnelle était nulle ce qui donnait l'équation de dispersion :

$$\mathcal{L}(\Psi_+, \Psi_+^*, \omega) = 0 \qquad (95)$$

En remarquant d'une part que le premier terme de $\mathcal{L}$ est négligeable car il s'agit d'énergie électrostatique faible devant l'énergie cinétique du plasma, d'autre part que nous pouvons écrire :

$$n_R \frac{\partial f}{\partial J_R} = \left(-n_R \frac{\partial h}{\partial J_R} + n_R \frac{\partial U}{\partial J_R}\right) \frac{f}{T}$$

il vient :

$$\mathcal{L} = -\sum_{ass.} \iiint \sum_m \frac{\left(-n_R \frac{\partial h}{\partial J_R} + \omega\right) + \left(n_R \frac{\partial U}{\partial J_R} + \omega\right)}{\omega + n_R \frac{\partial h}{\partial J_R}} \frac{f}{T} |h_m|^2 (2\pi)^3 d_3 J$$

$$\mathcal{L} = \sum_{ass} \iiint f \frac{\sum_m |h_m|^2}{T} (2\pi)^3 d_3 J - \sum_{ass} \iiint \sum_m \frac{\left(\omega + n_R \frac{\partial U}{\partial J_R}\right)}{\left(\omega + n_R \frac{\partial h}{\partial J_R}\right)} \frac{f}{T} |h_m|^2 (2\pi)^3 d_3 J$$

$$\mathcal{L} = \sum_{ass} \iiint \frac{n e^2}{T} |\Psi_+(\vec{x})|^2 d_3 x - \sum_{ass} \iiint \sum_m \frac{\left(\omega + n_R \frac{\partial U}{\partial J_R}\right)}{\left(\omega + n_R \frac{\partial h}{\partial J_R}\right)} \frac{f}{T} |h_m|^2 (2\pi)^3 d_3 J \qquad (96)$$

Pour aboutir à l'équation de dispersion des modes électrostatiques, il faut calculer le second terme pour les assemblées d'ions circulants et d'ions piégés.

Pour ce qui est de la contribution due aux ions circulants d'espèce α, il faut déterminer $|h_m|^2$ et $U(J)/T$ dans le système J, ϕ des particules circulantes (topologie de base du Tokamak). Nous mettrons alors $\Psi_+(\vec{x})$ sous la forme :

$$\Psi_+(\vec{x}) = \Psi_+(r) \exp(i\ell\theta + im\varphi)$$

$$h_m = e\Psi_+(r) \qquad \text{si} \quad n_2 = \ell \,, \; n_3 = m$$

$$h_m = 0 \qquad \text{si} \quad (n_2, n_3) \neq (\ell, m)$$

puisque les variables angulaires ϕ_2 et ϕ_3 sont ici θ et φ. L'Hamiltonien $h(J)$ s'écrit :

$$h(J) = \mu_\alpha B_0 + \frac{1}{2} m_\alpha v_{//}^2 + e_\alpha \Psi\left(\frac{2\pi e}{e_\alpha} J_2\right)$$

$$n_R \frac{\partial h}{\partial J_R} = \left(m + \frac{\ell}{q}\right) \frac{v_{//}}{R} + \ell e_\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_T} \frac{2\pi c}{e_\alpha} = K_{//} v_{//} + \ell e_\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_T} \frac{2\pi c}{e_\alpha}$$

$$U(J) = T\left(\log n_\alpha - \frac{3}{2}\log T + h\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{2\pi c}{e_\alpha} J_2\right)}{T} R_0 m_\alpha v_{//}\right)$$

en introduisant tout de suite le résultat (94) de la minimisation de $\dot{S}$ donnant $\Gamma = CT$, la vitesse angulaire des ions dans la direction toroïdale. Le second

terme $\mathcal{L}'$ de la fonctionnelle $\mathcal{L}$, dû aux ions circulants s'écrit alors :

$$\mathcal{L}'_{circ} = -\sum_{ass.} \int \cdots \frac{e^2 |\Psi_1(r)|^2 f_\alpha(J)}{T} \cdot \frac{\left[\omega + T\rho\left(\frac{\partial n_\alpha}{n_\alpha \partial \Psi_r} + \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T \partial \Psi_r} + \frac{1}{T}\frac{\partial \Gamma}{\partial \Psi_r} R_0 m_\alpha v_{//}\right)\frac{2\pi c}{e_\alpha} + \frac{\Gamma}{T}\left(m + \frac{l}{q}\right)\right]}{\omega + K_{//} v_{//} + \rho e_\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_r} \cdot \frac{2\pi c}{e_\alpha}} d_3x\, d_3p$$

c'est-à-dire en introduisant de nouveau :

$$\Omega^* = -\frac{T}{R}\frac{\partial n_\alpha}{n_\alpha \partial r}\frac{c}{e_\alpha B_\theta}$$

$$\Omega_E = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{c}{R B_\theta}$$

et $\chi = -m_\alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial r}(c/e B_\theta)$, $\eta = (\partial \log_q T / \partial \log_q n)$

$$\mathcal{L}'_{circ} = -\sum_{\substack{ass. \\ circ.}} \int \cdots \frac{e^2 \Psi_1 |n|^2 f_\alpha(J)}{T} \cdot \frac{\left(\omega + m\Omega^*\left(1 + \eta\left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2}\right)\right) + m\chi v_{//} + m\Omega_E\right)}{\omega + K_{//} v_{//} + m\Omega_E} \cdot J_0^2(K_\perp \rho_c)\, d_3x\, d_3p$$

où la fonction de Bessel d'ordre 0, $J_0(K_\perp \rho_c)$ tient compte de la correction au premier ordre à l'approximation de centre guide (ρ_c est le rayon de Larmor et $K_\perp^2 = (K_r^2 + l^2/mr^2)$).

Pour calculer la contribution $\mathcal{L}'_{piégé}$ des particules piégées à la fonctionnelle $\mathcal{L}$, responsable des modes d'ions piégés dans l'équation de dispersion (95) il faut tout d'abord redéfinir un système de variables angulaires et d'action relatif aux trajectoires de forme banane de ces particules. Introduisant λ, l'amplitude de la trajectoire à partir du plan équatorial, et ω_3 la fréquence du mouvement de va et vient de part et d'autre de ce plan $(\omega_2 = (r/2R)^{1/2}(v_\perp / qR))$, on peut caractériser le mouvement du centre guide d'une particule piégée par :

$$\varphi = \Phi_3 + \frac{\lambda}{R}\sin \omega_3 t$$

$$\theta = \frac{\lambda}{qR}\sin \omega_2 t \qquad (97)$$

$$v_{//} = \frac{\lambda}{qR}\omega_2 \sin \omega_2 t$$

On peut alors introduire le système de variables angulaires et d'action à partir de ces équations de mouvement :

$$\Phi_1, J_1 \qquad \text{habituels}$$

$$\Phi_2 = \omega_2 t \qquad J_2 = m_\alpha \lambda^2 \omega_2 / 2$$

$$\Phi_3 \qquad J_3 = \frac{e}{2\pi c}\Psi_p + R m_\alpha v_\varphi$$

$$h = \omega_c J_1 + \omega_2 J_2 + e_\alpha \Psi\left(\frac{2\pi c}{e_\alpha} J_3\right)$$

où la valeur de la fréquence cyclotronique ω_c est prise sur le plan équatorial, ces équations avec le système (97) définissent implicitement ϕ_2 , ϕ_3 , J_2 , J_3 en fonction des coordonnées naturelles de la configuration. Notons que :

$$\omega_3 = \frac{\partial h}{\partial J_3} = \Gamma + \frac{1}{3}\frac{m_\alpha v_\perp^2}{R^2}\frac{c}{eB_\theta} = \Gamma + \Omega^*_g \frac{v_\perp^2}{v_{th}^2}$$

Ω^*_g est la vitesse de precession angulaire thermique.
A l'aide de ce système de variables nous pouvons exprimer $n_\alpha(\Psi_p)$, $T(\Psi_p)$, $\Psi(\Psi_p)$ sous la forme $n_\alpha(\frac{2\pi c}{e} J_3)$, $T(\frac{2\pi c}{e} J_3)$, $\Psi(\frac{2\pi c}{e} J_3)$ et introduire la fonction de distribution :

$$f(J) = \frac{n_\alpha\left(\frac{2\pi c}{e} J_3\right)}{\left(2\pi m_\alpha T\left(\frac{2\pi c}{e} J_3\right)\right)^{3/2}} \exp - \frac{h}{T\left(\frac{2\pi c}{e} J_3\right)}$$

$$U = \mathrm{Log}\, n_\alpha\left(\frac{2\pi c}{e} J_3\right) + \left(\frac{h}{T} - \frac{h}{T\left(\frac{2\pi c}{e} J_3\right)}\right) + e\Psi\left(\frac{2\pi c}{e} J_3\right)$$

et le second terme de (96) s'écrit alors :

$$\mathcal{L}'_{Piege'} = -\sum_{\substack{ass \\ Piegu}} \int\cdots\sum_{p} \frac{e^2 |\Psi_d(r)|^2 f(J)}{T} \cdot \frac{[\omega + m\Omega^*(1+\eta(\frac{h}{T}-\frac{3}{2}) + m\Gamma]}{\omega + m\Omega_E + m\Omega^*_g \frac{v_\perp^2}{v_{th}^2} + p\omega_2} \cdot J_0^2(K_\perp \rho_c) \cdot J_p^2(K_{//}\lambda)\, d_3\alpha\, d_3 v \quad (98)$$

La fréquence de "bounce" ω_2 étant très supérieure à $\omega + m\Omega_E$, il convient en pratique de ne prendre dans la sommation sur p que le premier terme $p = 0$.

Pour les modes dus essentiellement aux ions que nous considérons ici, la valeur du second terme $\mathcal{L}'_e$ de la fonctionnelle $\mathcal{L}$ défini en (96) est négligeable pour les électrons.

L'influence de la rotation $\Gamma(r)$ sur les modes électrostatiques dus aux ions circulants est faible tant que $\chi v_{th} \ll \eta\Omega^*$ c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial r} \cdot \frac{R}{v_{th}} \ll \frac{\partial \mathrm{Log}\, T}{\partial r}$$

l'effet du gradient est alors dominant. Les modes sont instables pour une valeur de η supérieure à $\eta_c \sim$ 1 à 2 [34] . En présence de rotation, la valeur critique η_c est un peu modifiée mais comme de toute façon il semble que ces modes dus à $\partial T/\partial r$ n'ont pas été observé à un niveau dangereux jusqu'à présent,

même pour des valeurs de $\eta > \eta_c$, on peut légitimement penser que leur stabilité ne sera pas affectée par la rotation. Ils sont stabilisés par le cisaillement des lignes de champ magnétique qui leur impose une localisation radiale au voisinage de la surface $r = r_{rm}$ dans un intervalle :

$$\Delta_1 r \leq (\rho_{ti}\, qR/r)\,(r\,dq/q\,dr)^{-1} \sim \rho_{ti}\, qR/r$$

Par contre la stabilité des modes dus aux ions piégés peut être considérablement affectée par la rotation du plasma. Ces modes apparaissent lorsque la fonctionnelle $\mathcal{L}'_{circ}$ devient négligeable c'est-à-dire pour :

$$k_{\parallel} v_{ti} \gg m\,\Omega^*$$

c'est-à-dire sur des surfaces r telles que :

$$|r - r_{rm}| \gg \frac{R}{qr}\,\rho_{ti}\,\frac{d\,\mathrm{Log}\,n}{d\,\mathrm{Log}\,q}$$

La fonctionnelle $\mathcal{L}'_{\text{piégé}}$ joue alors un rôle prépondérant. En l'absence de rotation $(\Omega_E = 0)$, exprimant que $\mathrm{Im}\,\mathcal{L} = \mathrm{Im}\,\mathcal{L}'_{\text{piégé}} = 0$ nous obtenons un mode marginalement instable pour $\eta > 2/3$ et $\omega + m\,\Omega(r) = m\,\Omega^*_g$. Le mode n'est pas localisé par le shear magnétique et peut exister dans un large intervalle en r . Cependant une valeur finie de $\partial\Omega_E/\partial r$ augmente les valeurs du dénominateur $\omega + m\,\Omega_E + m\,\Omega^*_g\,(v_\perp^2/v_{ti}^2)$ dans l'expression de $\mathcal{L}'_{\text{piégé}}$ et diminuera cette quantité. La relation de dispersion :

$$\mathcal{L} = 2\iiint \frac{n e^2}{T}\,|\Psi_+(r)|^2\,d_3x + \mathcal{L}_{\text{Piégé}} = 0$$

ne peut plus être satisfaite à moins que le mode soit localisé dans un intervalle radial :

$$\Delta_2 r \leq \rho_{ti}\, q \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \left(rR\,\frac{\partial\Omega_E}{v_{ti}\,\partial r}\right)^{-1}$$

Les modes dus aux particules piégées sont en fait stabilisés par le gradient $\partial\Omega_E/\partial r$ comme les modes dus au particules circulantes par le shear magnétiques $(\partial q/q\,\partial r)$. On peut admettre qu'ils ne peuvent pas être plus dangereux pour le confinement que les modes dus aux particules circulantes s'ils sont aussi localisés que ces derniers, c'est-à-dire si $\Delta_2 r \sim \Delta_1 r$. Cette condition impose une vitesse de rotation relativement faible :

$$\Omega_E^2 R^2 / v_{ti}^2 \sim r/R$$

5) Examen de quelques méthodes pouvant provoquer la rotation du plasma

Il est possible de transférer au plasma de la quantité de mouvement autour du grand axe par l'injection de neutres rapides ou des ondes progressives à la vitesse V_0 . Pour une densité de force appliquée F , la densité de puissance à fournir est $V_0 F$. Cette densité de puissance est minimum si l'on peut choisir V_0 aussi proche que possible de la vitesse de rotation du plasma $R\Gamma$; de ce point de vue, pour $R\Gamma \lesssim \nu_{ii}$, l'injection de neutre rapide, pour laquelle $V_0 \gg \nu_{ii}$ n'est pas un procédé économique.

Un pompage magnétique avec des ondes de vitesse $V_0 \sim \Gamma R$ est en principe plus approprié. La densité de face induite F doit contrebalancer la friction F_R produite sur les assemblées ioniques par les ripples $\delta B = B_0 \delta \cos N\varphi$ du champ statique B_0 ainsi que la friction $F_V \sim \mathrm{div}\,(\chi_V n_i m_i R\, \partial\Gamma/\partial r)$ due à la viscosité. La densité de puissance $V_0 F_V = P_V$ équilibrant la viscosité peut s'écrire $P_V \sim (\chi_V/\chi_i)(V_0^2/\nu_{ii}^2)\, P_T$ où χ_i est le coefficient de diffusion ionique de l'énergie et P_T est la densité de puissance nécessaire pour maintenir le grandient thermique des ions. On peut faire l'hypothèse pessimiste mais plus réaliste de $\chi_V/\chi_i \sim 1$ bien que la valeur néoclassique [30] pour un régime banane donne $\chi_V/\chi_i \sim (r/R)^{3/2}$, de plus nous pouvons aussi envisager dans le cas d'un réacteur, un rapport $P_T/P_\alpha \ll 1$ où P_α est la densité de puissance des particules α qui entretiendrait alors le gradient thermique, de ce fait le rapport $V_0 F_V / P_\alpha$ serait très inférieur à 1 même si V_0 est de l'ordre de la vitesse thermique des ions. La densité de puissance $V_0 F_R = \sqrt{\pi}\,(N\nu_{ii}/R)\,\delta^2\,(n_i m_i V_0^2/2)$ due à la friction des assemblées sur les ripple magnétiques est très importante, même pour de faibles valeurs de δ. Par exemple, pour $n_i = 10^{14}\ cm^{-3}$, $T = 10\ KeV$, $V_0 = \nu_{ii}/3$, $R/N = 50\ cm$, δ doit être inférieur à 2.10^{-4} pour ne pas avoir à recycler plus d'un pour cent de la puissance des particules α afin de maintenir la rotation.

On voit bien que la nécessité de très faibles corrugations du champ magnétique est la principale difficulté pratique pour obtenir économiquement une rotation du plasma substantielle. Par exemple un pompage magnétique par des ondes compressionnelles $\delta B = b\cos(\omega t - m\varphi)$, à la vitesse de phase $V_0 = \omega/m = 2\pi R$, pourrait provoquer la rotation du plasma pour une amplitude b telle que $b/B \sim (\chi_V R/r^2 m_i \nu_i)^{1/2}$, avec le défaut habituel que seule une fraction $\sim \beta$ de l'énergie du mode au bord

du plasma est absorbé par celui-ci, provoquant ainsi des pertes importantes dans les circuits électriques. Notons ici qu'un pompage magnétique par des ondes torsionnelles induites par des courants hélicoïdaux de la forme : $\exp(i\omega t - i\ell\theta - i m\varphi)$, qui créérait des ilots magnétiques analysés au paragraphe précédent (B.III) permettrait d'entraîner le plasma par le phénomène d'accrochage des ilots à la vitesse $V_0 = \omega/m = \Gamma R$, et que l'équation (93) requierait une amplitude du mode $b \sim (\chi_v \frac{Rq}{r})^{1/2} V_0^{1/2}$. [35]

En fait dans un réacteur, une rotation du plasma pourrait être en principe établie sans action extérieure. Les modulations du champ B_0 dues au ripple peuvent être résonantes avec le mouvement de précession des particules α d'énergie E_α piégées dans les trajectoires bananes si $\Gamma = \Omega^*_{q\alpha} = (E_\alpha/R^2)(c/2eB_\theta)$. Comme E_α est grand, $R\Omega^*_{q\alpha}$ peut être une fraction significative de la vitesse thermique v_{ti}. Si cette résonance s'établit, les particules α piégées subissent un fort couplage avec les ripples qui tendent à les immobiliser, ceci signifie que les ripples exercent une force sur le plasma lui donnant une vitesse opposée à la vitesse diamagnétique $(E_\alpha/r)(c/2eB_\theta) \gg R\Omega^*_{q\alpha}$ de l'assemblée α . Bien sûr il faut que cette force F_α l'emporte sur la force de friction F_R exercée par les mêmes ripples sur l'assemblée ionique, la condition $F_\alpha > F_R$ s'écrit : $(S\tau E_\alpha/n_i T)(v_{ti}/\Gamma R)\{\exp(\Gamma^2R^2/v_{ti}^2)\}(R/r)^{1/2} X > 1$ où S est le taux de production des particules α ($cm^{-3}s^{-1}$), τ est le temps de ralentissement $(dE_\alpha/E_\alpha dt)^{-1}$ et X est un facteur géométrique de l'ordre de 1. Cette condition est indépendante de n_i et peut être (assez marginalement) satisfaite pour $\Gamma R \sim v_{ti}$ si $T \sim 20$ KeV .

B.V - ETUDE DE DEUX SCHEMAS DE PURIFICATION D'UN PLASMA TOKAMAK

L'accumulation d'impuretés métalliques dans un plasma thermonucléaire d'une configuration Tokamak est un des plus sérieux problèmes à résoudre en vue d'atteindre l'ignition d'un réacteur. La présence de ces ions métalliques multichargés est en effet une cause importante de perte d'énergie et plusieurs dispositifs sont actuellement proposés et testés pour éviter cette contamination du plasma, la plupart étant basés sur le principe du "déflecteur magnétique" ou "magnetic divertor" [36] . Nous étudions ici deux autres possibilités, la première utilisant un champ électromagnétique haute fréquence [37] et la seconde proposant une ergodisation des lignes de champ magnétique au bord du plasma [38].

1) Extraction d'ions lourds du plasma par un champ électrique H.F.

Nous considérons l'expression du champ magnétique, incorporant les modulations de la corrugation due à l'espacement des bobines toroïdales, donnée au paragraphe B.II.3 $B = B_0 (1 - (r/R)\cos\theta - \delta(r)\cos N\varphi)$. (En négligeant toutefois ici l'exponentielle $\exp -\beta\theta^2$ car nous n'envisagerons pas de grandes variations en θ de la position des particules). De plus nous nous placerons dans le régime de piégeage effectif défini plus haut et appliqué ici aux ions impuretés de charge Z que nous considérons. S'il existe, dans une région où sont formés des miroirs magnétiques locaux, un champ électrique de la forme $\vec{E} \exp i\omega t + c.c.$, dirigé principalement selon une perpendiculaire au champ magnétique, il sera résonant avec les ions impuretés (de masse m_z, de charge Ze) sur la surface définie par $-\omega = \omega_{cz} = Ze\,B(r,\theta,\varphi)/m_z c$. Lorsqu'un ion impureté, dans son mouvement le long d'une ligne de champ, traverse cette surface de résonance il acquierra de l'énergie transversale et sera éventuellement piégé entre deux miroirs locaux ; dans ce cas il traversera la surface de résonnance de multiples fois durant son mouvement de va et vient entre les miroirs locaux et augmentera ainsi à chaque fois son énergie transversale. Si la vitesse de dérive du centre guide des particules, due à la courbure des lignes de champ, est dirigée vers le bord du plasma, ces ions seront rejetés vers l'extérieur du plasma durant leur piégeage.

Au passage à travers la surface de résonance, la vitesse longitudinale d'un ion est inchangée, en revanche sa vitesse transversale subit une brusque variation $\overrightarrow{\Delta v_\perp}$ donnée par [39] :

$$|\overrightarrow{\Delta v_\perp}| = \frac{Ze}{m_z} |E_x + i E_y| \cdot \left| \frac{2\pi}{\omega_c' v_{//}} \right|^{1/2} \qquad (99)$$

où x et y sont deux directions arbitraires perpendiculaires à $\vec{B}$ et ω_c' est la valeur de $\nabla_{//} \omega_c$ pris au point de résonance. La direction de $\overrightarrow{\Delta v_\perp}$ est aléatoire. Cet ion sera piégé entre les miroirs locaux de part et d'autre de la surface de résonance si $|\overrightarrow{\Delta v_\perp}|$ est supérieure à la vitesse limite $v_{\perp e}$ du cône de perte du miroir magnétique. En moyenne cette condition s'écrit :

$$|\overrightarrow{\Delta v_\perp}|_{v_{//} = v_{th\,z}} = v_{\perp 0} \gg v_{\perp e} = \left(\frac{B(\vec{x}_0)}{B_{max} - B(\vec{x}_0)} \cdot v_{th\,z}^2 \right)^{1/2}$$

$$v_{\perp 0} = \frac{Ze}{m_z} |E_x + i E_y| \left(\frac{L}{\delta \omega v_{th,z}} \right)^{1/2} \gg \frac{v_{th\,z}}{\delta^{1/2}} \qquad (100)$$

où $L = 2\pi R/N$ est la distance (comptée sur l'axe magnétique) entre deux bobines toroïdales. Cet ion décrit alors un mouvement de "marche au hasard" dans l'espace de la vitesse perpendiculaire. A sa vitesse $\vec{v}_\perp$ s'ajoute un vecteur $\overrightarrow{\Delta v_\perp}$ aléatoire à chaque passage à la résonance, c'est-à-dire quatre fois par période du mouvement longitudinal de va et vient, nous pouvons donc définir un coefficient de diffusion $D_{HF} = \overline{(\Delta v_\perp^2)} / \tau$ où $\tau = 2\pi/4\omega_b = (2\pi/4)(v_\perp^2 \delta / 2L^2)^{-1/2}$. Le coefficient D_{HF} est proportionnel à $v_\perp$ et nous l'écrivons sous la forme :

$$D_{HF} = K \frac{v_\perp}{v_{//}}$$

$$K = \left(\frac{Ze}{m_z} \right)^2 |E_x + i E_y|^2 \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta'}\, \omega \pi} \qquad (101)$$

En négligeant l'effet des collisions, la vitesse longitudinale $v_{//}$ à la surface de résonance reste égale à la vitesse initiale, c'est-à-dire à peu près $v_{th\,z}$. Au temps t ($t \gg \tau$), la vitesse perpendiculaire quadratique moyenne de la particule est donnée par $\overline{v_\perp^2} = \int_0^t D_{HF}(t)\, dt = \int_0^t D_0' \cdot v_\perp\, dt$. L'équation de diffusion s'écrit alors :

$$\frac{d\overline{v_\perp^2}}{dt} \simeq D_0' \overline{v_\perp} = D_0' (\overline{v^2})^{1/2}$$

c'est-à-dire : $$\overline{v_\perp^2} = D_0'^2 \frac{t^2}{4}$$

Pour être dépiégée à l'instant t, la particule doit se trouver à l'instant $t - \tau$ dans la couronne $v_{\perp_0} \pm v_{\perp c}$ du plan $\vec{v_\perp}$ de l'espace des vitesses perpendiculaires. A la distance $v_{\perp_0}$, la probabilité de dépiégeage durant le temps τ est $2v_{\perp c}/2\pi v_{\perp_0}$, cette probabilité tombe à zéro à la limite de la couronne $v_{\perp_0} + v_{\perp c}$, $v_{\perp_0} - v_{\perp c}$ et peut être moyennée à l'intérieur de la couronne à la valeur $\frac{1}{2}\left(2v_{\perp c}/2\pi v_{\perp_0}\right)$. Si $P(t)$ est la probabilité pour qu'un ion ait été dépiégé avant l'instant t, la probabilité qu'il le soit à l'instant t est $(t \gg \tau)$:

$$P_c(t) = \frac{(1-P(t))}{\pi \overline{v_\perp^2(t)}} \int_{v_{\perp_0}-v_{\perp c}}^{v_{\perp_0}+v_{\perp c}} 2\pi v_\perp \exp - \frac{v_{\perp_0}^2}{\overline{v_{\perp c}^2}} \, dv_\perp = (1-P(t)) \frac{4 v_{\perp_0} v_{\perp c}}{\overline{v_\perp^2(t)}}$$

et l'on obtient alors la probabilité $(dP/dt)\,dt$ que la particule soit dépiégée durant dt sous la forme :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right) dt = (1-P) \frac{4 v_{\perp_0} v_{\perp c}}{\overline{v_\perp^2(t)}} \cdot \frac{1}{2} \frac{2 v_{\perp c}}{2\pi v_{\perp_0}} \frac{dt}{\tau(v_{\perp_0})}$$

En intégrant cette équation à partir de l'instant origine tel que $\overline{v_\perp^2} \sim v_{\perp_0}^2$ nous obtenons $P(t)$ dont la valeur reste finie pour $t \to \infty$: $P(\infty) = v_{\perp c}^2 / \delta . v_{\perp_0}^2$, et reste faible si la condition (100) est vérifiée. Ce résultat est dû au fait que le coefficient D_{HF} est proportionnel à $v_\perp$.

En prenant maintenant en compte l'effet des collisions qui augmente la vitesse parallèle des particules, nous notons que la particule reste piégée si la valeur quadratique moyenne $\overline{v_\parallel^2}$ de $v_\parallel$ à un instant de l'ordre de τ est plus faible que la valeur $v_{\perp_0}^2 \delta$ de $v_\perp^2$ prise sur le cône de perte pour $v_\perp = v_{\perp_0}$. Introduisant alors le coefficient de diffusion $D_{\parallel}(v_\perp)$: $\overline{v_\parallel^2} = D_{\parallel}(v_\perp)\, t$, nous devons avoir $D_\parallel(v_{\perp_0})\,\tau \ll v_{\perp_0}^2 \delta$, c'est-à-dire $D_{\parallel}(v_{\perp_0}) \ll \delta\, D_{HF}(v_{\perp_0}, v_{\perp c})$. Dans ces conditions l'effet des collisions est négligeable avant que la particule n'ait atteint une vitesse moyenne $\overline{v_\perp^2} \gg v_{\perp_0}^2$. Nous considérons donc les processus de diffusion à un instant ultérieur. Pour simplifier, nous prendrons seulement en compte les collisions impuretés - Hydrogène dans la limite où $v_{\perp_0}$ est supérieure à la vitesse thermique des ions Hydrogène. Dans ce cas [21] :

$$D_{\perp}(v_{\perp}) = A_D \cdot \frac{1}{v_{\perp}} = A_D \frac{1}{(\overline{v_{\perp}^2})^{1/2}}$$

$$A_D = \frac{8\pi e^4 m_H Z^2 \log\Lambda}{m_e^2}$$

D'autre part nous obtenons, à partir de l'équation (101), une estimation de D_{HF} de la forme $D_{HF} = K(\overline{v_{\perp}^2})^{1/2} / (\overline{v_{//}^2})^{1/2}$. Intégrant ensuite le système $d\overline{v_{\perp}^2}/dt = D_{HF}$ et $d\overline{v_{//}^2}/dt = D_{//}$ (avec $v_{//} = v_{th}$ et $v_{\perp} = v_{\perp 0}$ pour $t = 0$) on obtient à tout instant t :

$$(\overline{v_{//}^2})^{1/2} = v_{th} + \frac{A_D}{K}\left(\mathrm{Log}\left[\frac{(\overline{v_{\perp}^2})^{1/2}}{v_{\perp 0}}\right] - 1\right) \qquad (102)$$

$$(\overline{v_{\perp}^2})^{1/2}\left\{\mathrm{Log}\left(\frac{(\overline{v_{\perp}^2})^{1/2}}{v_{\perp 0}}\right) - 1\right\} + \left((\overline{v_{\perp}^2})^{1/2} - v_{\perp 0}\right)\left(\frac{K v_{th}^2}{A_D} - 1\right) = \frac{K^2 t}{2 A_D} \qquad (103)$$

Pour de grandes valeurs de $v_{\perp}$ ($v_{\perp} \gg (\overline{v_{//}^2}/\delta)^{1/2}$) , la densité de probabilité $\mathcal{P}(v_{\perp}, v_{//}, t)$ pour une particule à l'instant t d'avoir une vitesse $(v_{//}, v_{\perp})$ est la Maxwellienne :

$$\mathcal{P}_M(v_{\perp}, v_{//}, t) = \frac{(1 - P(t))}{\pi^{3/2}(\overline{v_{//}^2})^{1/2}\,\overline{v_{\perp}^2}} \exp -\left(\frac{v_{\perp}^2}{\overline{v_{\perp}^2}} + \frac{v_{//}^2}{\overline{v_{//}^2}}\right) \qquad (104)$$

où de nouveau $P(t)$ est la probabilité pour que la particule ait été dépiégée avant l'instant t.
Pour $v_{\perp} < (\overline{v_{//}^2}/\delta)^{1/2}$, la densité $\mathcal{P}(v_{\perp}, v_{//}, t)$ est déterminée par l'équation de diffusion assortie des conditions aux limites $\mathcal{P} = 0$ sur le cône de perte et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_M$ pour $v_{\perp} = (\overline{v_{//}^2}/\delta)^{1/2}$. Nous obtenons alors approximativement :

$$\mathcal{P}(v_{\perp}, v_{//}, t) = \frac{\delta^{1/4} v_{\perp}^{1/2}}{(\overline{v_{//}^2})^{1/4}}\left(1 - \frac{v_{//}^2}{\delta v_{\perp}^2}\right)\mathcal{P}_M\left((\overline{v_{//}^2}/\delta)^{1/2}, 0, t\right) \qquad (105)$$

On peut alors calculer l'intégrale sur la surface du cône de perte du flux de probabilité $D_{HF}\nabla_{\perp}\mathcal{P} + D_{//}\nabla_{//}\mathcal{P}$, cette intégrale représente le flux de particule dépiégée c'est-à-dire dP/dt :

$$\frac{dP}{dt} = (1 - P(\delta)) \frac{4}{7(\pi\delta)^{1/2}} \left(K + \frac{14}{5} \frac{A_D}{(\overline{v_{\parallel}^2})^{1/2}} \right) \frac{1}{(\overline{v_{\perp}^2})}$$

En intégrant cette équation, à l'aide des équations (102) (103), à partir d'un instant tel que $\overline{v_{\parallel}^2} = v_{\perp_0}^2 \delta$, nous pouvons obtenir une expression de la probabilité de dépiégeage qui reste faible à tout instant t si :

$$\frac{v_{\perp_0}^2}{v_{th_2}^2} \delta \gg \left(\frac{A_D}{K v_{th_2}} \right)^2 , \left(\frac{A_D}{K v_{th_2}} \right)$$

Ces deux conditions, ainsi que la condition (100), signifient qu'une particule traversant la surface de résonance une première fois, a ensuite une grande probabilité de rester piégée dans le miroir magnétique et donc de sortir du plasma à cause de la dérive du centre guide.

Dans la région des miroirs locaux où le champ H.F. est appliqué et dans lequel il y a une densité n_z d'ions impuretés, le nombre de particules extraites par seconde est égal à $\mathcal{N} = n_z S \bar{v}_d$ où $S = 2\pi R (L B_\theta / B_0)$. La vitesse moyenne de dérive du centre guide $\bar{v}_d = T_\perp / m_z \omega_c R$ où $T_\perp$ est l'énergie transverse moyenne des ions piégés. On peut estimer cette énergie en notant que les ions subissent l'effet d'extraction pendant au temps de l'ordre de $\Delta / \bar{v}_d$, où Δ est l'extension radiale du champ H.F. :

$$T_\perp = \frac{m_z v_{\perp_0}^2}{2} \left[\frac{\omega_c \Delta}{v_{\perp_0}} \frac{R\sqrt{2\delta}}{\pi L} \right]^{1/2} \qquad (106)$$

Le flux moyen d'impuretés extraites $\Phi_z = \mathcal{N} / 4\pi^2 R r$ est relié à n_z par :

$$n_z = \frac{2\pi q R^2 \omega m_z}{L T_\perp} \Phi_z \qquad (107)$$

où q est le facteur de sureté au bord du plasma.

Pour appliquer le champ H.F. dans la région du plasma où il sera utile nous disposons de deux moyens. Le premier est d'exciter dans cette région une onde compressionnelle d'Alfven. La pénétration radiale du champ s'étendra sur la distance $\Delta \sim k_r^{-1}$ où k_r est calculé par l'égalité $k_r^2 = \frac{\omega^2}{C_A} - k_\theta^2 - k_{\parallel}^2$. (k_θ et $k_{\parallel}$ sont reliés simplement aux dimensions du système d'antennes

suivant les direction θ et φ). Le calcul de la composante utile $|E_x + i E_y|$ peut être fait par la minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{L}$ (54) appliquée à un mode compressionnel ($\delta\Psi = 0$, $\vec{\delta A} // \vec{B}$) , on trouve ainsi qu'à cause de la résonance des ions, le champ électrique est atténué par rapport à sa valeur à l'extérieur du plasma :

$$\frac{|E_x + i E_y|}{E_0} = \left(\frac{\lambda^2}{2+\lambda^2}\right)^{1/2}$$

$$\lambda = \frac{|\omega^2 - k_\parallel^2 c_A^2| \cdot k_\parallel v_{th}}{\omega_{pz}^2 \sqrt{\pi}\, \omega} \qquad (108)$$

où ω_{pz} est la fréquence plasma des ions impuretés. L'équation (108) combinée à (107) et (100) donne la valeur minimale E_0 à appliquer au plasma pour extraire un flux Φ_z donné d'impuretés.

L'autre possibilité est d'appliquer dans la région utile du plasma une onde torsionnelle d'Alfven créée par des antennes situées en amont des lignes de flux. Il n'y a alors pas d'atténuation de l'onde à l'endroit où elle est émise car il y a peu d'ions impuretés (ils sont concentrés dans la région de résonance) et de plus ils ne sont pas résonants avec l'onde. Si le système d'antennes produit un courant électrique de la forme $\exp(i\ell\theta + im\varphi - i\omega t) + c.c.$ une onde d'Alfven de même géométrie sera excitée au voisinage du rayon $r^*_{\ell m}$ tel que $\omega = k_\parallel c_A(r^*_{\ell m}) = \left(m + \frac{\ell}{q(r^*_{\ell m})}\right) c_A(r^*_{\ell m}) / R$ où $c_A(r^*_{\ell m})$ est la vitesse d'Alfven en $r = r^*_{\ell m}$ et se propagera le long des lignes de flux jusqu'à la région de résonance. Les résultats de la théorie de plage magnétique [40] montrent qu'il sera complètement absorbé par résonance cyclotronique avec les ions impuretés. Le mode $(\vec{\delta A}, \delta\Psi)$ de même géométrie que les courants électriques dans les antennes sera donné par l'extrémum de la fonctionnelle :

$$\mathcal{L} = -\iiint \left\{ |\vec{\nabla} \times \vec{A}_+|^2 - \frac{c^2}{c_A^2} |\vec{\nabla} \Psi_+|^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left| \vec{A}_+ + \frac{k_\parallel c}{\omega} \Psi_+ \right|^2 \right\} d_3 x$$

où ω_{pe} est la fréquence plasma électronique. Nous avons négligé ici les effets de résistivité à cause de la valeur très grande de ω . L'extrémalisation de $\mathcal{L}$ donne un système de deux équations différentielles de second ordre en $A_+(r)$ et $\Psi_+(r)$. A l'intérieur du plasma, loin de la surface $r = r^*_{\ell m}$ deux types de solutions existent :

. La solution MHD telle que $A_+ + (k_\parallel c/\omega)\,\Psi_+ = 0$, avec, en prenant un profil de densité $n(r)$ linéaire en r : $A_+ = J_0\left(i\,\frac{\ell}{r}(r - r^*_{\ell m})\right)$ où $J_0(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0.

. Une solution beaucoup plus localisée [41] de la forme $A_+ = f(r - r^*_{\ell m})$, $\Psi_+ = -(k_\parallel c_A^2/\omega_c)\, f(r - r^*_{\ell m})$ avec $f(r - r^*_{\ell m}) = J_0\left((r - r^*_{\ell m})/\Delta)^{3/2}\right)$ où $\Delta = (2\omega_p/3c)^{2/3}\,(\partial n/n\,\partial r)^{2/3}$.

A l'extérieur du plasma, le mode est de type MHD, essentiellement de la forme :

$$A_+ = -\frac{k_\parallel c}{\omega}\,\Psi_+ = \alpha\, H_0\left(i\,\frac{\ell}{r}(r - r^*_{\ell m})\right) \qquad (109)$$

où H_0 est la fonction de Hanckel qui varie comme $\exp\left(\ell(r - r^*_{\ell m})/r\right)$ pour $\ell\,(r - r^*_{\ell m})/r \gg 1$. Contrairement à la fonction H_0 , le champ $(\vec{A}_+(r)\,,\,\Psi_+(r))$ n'a pas de singularité au voisinage de la surface $r = r^*_{\ell m}$ car le mode MHD est couplé dans cette région avec le mode localisé. Cet effet de couplage a lieu sur un intervalle Δ autour de $r^*_{\ell m}$. Le mode (109) rend donc bien compte du champ H.F. pour des distances $|r - r^*_{\ell m}| > \Delta$.

Nous estimons enfin que la valeur du champ électrique $E = \partial\Psi_+/\partial r$ au voisinage de $r = r^*_{\ell m}$ dans l'intervalle Δ est augmenté par rapport à sa valeur E_0 au bord du plasma $r = r_0$ d'un facteur :

$$\frac{E_{r = r^*_{\ell m}}}{E_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{(r_0 - r^*_{\ell m})^{1/2}}{(\ell/r^*_{\ell m})^{1/2}}\,\exp -\frac{r_0 - r^*_{\ell m}}{r^*_{\ell m}}$$

Une condition pour une propagation effective du mode dans la direction θ est qu'il n'y ait pas recouvrement des divers domaines de résonances :

$$\Delta < |r^*_{\ell m} - r^*_{\ell+1,m}| = \frac{1}{2}\,\frac{\partial n}{n\,\partial r}\,(\ell + mq(r))^{-1}$$

Le champ électrique $E_{r = r^*_{\ell m}}$ est polarisé dans la direction r et produit sur les particules un accroissement de vitesse perpendiculaire $v_{\perp 0}$ qui, s'il satisfait la condition (100) permet le piégeage et l'extraction des ions impuretés. La valeur maximum du flux d'impuretés qui peut alors être extrait est déterminée simplement en exprimant que la puissance électrique qui se propage le long des lignes de flux à la vitesse c_A depuis les antennes jusqu'à la zone d'absorption est convertie en énergie cinétique des ions impuretés :

$$\Phi_z = \frac{\Delta}{T_\perp}\,\frac{|E_0|^2}{2}\,\frac{c^2}{c_A^2}\,\frac{c_A}{qR}$$

où $T_\perp$ est donnée par (106).

Des applications numériques ont été données [42] qui montrent que des champs électriques $E_0 \sim 10^4\ Vm^{-1}$ dans les deux dispositifs d'antennes permettent d'extraire des flux d'impuretés (oxygène par exemple) de l'ordre de 10^{17} particules par m^2 et par seconde. La puissance H.F. requise est de l'ordre de 10 KW, c'est-à-dire négligeable devant la puissance thermique échangée par le plasma au bord. Les particules extraites ont une énergie de l'ordre de 7 à 10 Kev, ce qui nécessite des cavités collectrices afin d'éviter le "sputtering" sur la paroi de la chambre à vide. Enfin notons que ces calculs ont été repris par Jacquinot et al, pour étudier le piégeage et la dérive d'ions Hydrogène lors de l'étude du chauffage du plasma de TFR par l'absorption d'ondes H.F. à la fréquence cyclotronique des ions légers. Des collecteurs placés à l'extérieur du plasma recueillaient les ions Hydrogène extraits du plasma par piégeage dans les miroirs magnétiques locaux et mesuraient leur flux et leur énergie. Les résultats expérimentaux [43] sont en bon accord avec les calculs précédents.

2) Le "Divertor" ergodique

Un autre moyen de diminuer la concentration en impuretés à l'intérieur du plasma est de créer une couche au bord du plasma où les lignes de champ sont ergodiques, et où les coefficients de diffusion des particules et de l'énergie sont ainsi augmentés par rapport à leurs valeurs normales dues aux collisions ou à la turbulence. On peut attendre d'abord d'une telle situation un refroidissement du plasma au bord et donc une diminution des effets de "sputtering" sur la paroi; à ce moindre recyclage des atomes de la paroi s'ajoute en second lieu un effet de décontamination en impureté dans la couche.

Le premier problème est d'évaluer les coefficients de diffusion dans la couche ergodique. Si l'ergodisation est créée par une perturbation $\vec{\delta A}$ du potentiel vecteur magnétique parallèle à $\mathbf{B}$ de la forme :

$$\delta A_{\parallel} = \sum_{l,m} A_{l}(r) \exp(i l\theta + i m\varphi) + c.c.$$

les particules circulantes subissent une perturbation Hamiltonienne qui apparaît comme une somme de termes de la forme (43) résonant sur les surfaces de l'espace des phases :

$$\Omega \equiv \left(m + \frac{l}{q(r)}\right) v_{\parallel}/R = 0$$

Dans la mesure où les ilots magnétiques ainsi créés se recouvrent, et où le coefficient de diffusion $\langle \delta\Omega^2 \rangle$ de la variable Ω, créé spontanément et par l'ergodisation, vérifie l'équation (47) :

$$\langle \delta\Omega^2 \rangle^{1/3} > \nu_c \qquad (110)$$

la diffusion due à l'ergodisation est quasilinéaire. Le coefficient de diffusion est donné par (44) qui s'écrit ici :

$$\langle \delta r^2 \rangle = D_{QL} = D'_{QL}\, \nu_{th}$$

$$D'_{QL} = 2\sqrt{\pi}\, \nu\, \frac{\rho R}{r^2} \left(\frac{q^2}{\dot{q}}\right) \frac{|A_+|^2}{B^2}$$

où $\nu\, dr$ est le nombre de surfaces résonantes dans l'intervalle dr et $\dot{q} = dq/dr$. En fait, pour les situations que nous considérons ici, la condition (110) n'est pas réalisée. Le coefficient de diffusion d'une assemblée de particules, dû à l'ergodisation, si on néglige l'effet d'un champ électrique éventuel associé à l'ergodisation magnétique, est donné par :

$$D_E = D'_{QL} \cdot \frac{\lambda_c}{\mathcal{L}}\, \nu_{th} \qquad (111)$$

où la longueur de corrélation $\mathcal{L}$ est donnée par : (dans le cas le plus simple où l'ergodisation est répartie uniformément sur les surfaces magnétiques)

$$\mathcal{L}^{-1} = \frac{\langle \delta\Omega^2 \rangle^{1/3}}{\nu_{th}} \sim (2\sqrt{\pi})^{1/3}\, \nu^{1/3}\, \rho \left(\frac{\dot{q}}{q^2}\right)^{1/3} \left(\frac{|A_+|^2}{B^2}\right)^{1/3} \frac{1}{(r^2 R)^{1/3}}$$

Si la distance ν^{-1} entre deux surfaces résonantes est de l'ordre de l'épaisseur des ilots, alors $\mathcal{L} \sim qR$. De plus la formule (111) doit être corrigée de l'effet logarithmique introduit par Rechester et Rosenbluth [15] ; le coefficient D_E réel est celui donné par (111) divisé par $\mathrm{Log}\,(D'_{QL}\, \nu_{th} / D_N)$ où D_N est le coefficient de diffusion normal dû aux collisions ou à la turbulence.

Le coefficient de diffusion corrigé (111) ne s'applique pas à la masse du plasma, c'est-à-dire aux ions Hydrogène, dont le mouvement d'ensemble le long des lignes de flux n'est pas ralenti par des effets de friction. Le flux de particules Φ_z d'une assemblée Z donnée est alors la somme :

$$\Phi_z = n_z v_{QL} - D_{Ez} \frac{\partial n_z}{\partial r} - D_{Nz} \frac{\partial n_z}{\partial r} \qquad (112)$$

où la vitesse v_{QL} :

$$v_{QL} = - D'_{QL} v_{tH} \frac{\partial p}{p \partial r}$$

est la vitesse de diffusion quasilinéaire des ions Hydrogène sous l'effet du gradient de la pression totale p.

On peut alors examiner le moyen de contrôler la température des ions et des électrons dans la couche indépendamment de la densité n et en particulier d'abaisser les températures ioniques et électroniques sans augmenter la densité. Une première possibilité est de faire apparaître, grâce à l'ergodisation, un coefficient de diffusion D_{Ee} des électrons largement supérieur au coefficient normal D_{Ne}, en maintenant cependant D_{QLH} à une valeur de l'ordre de D_{NH}. Dans cette situation l'économie des particules au bord du plasma n'est pas perturbée, c'est-à-dire que le même taux d'injection de particules neutres recyclées réalise la même densité au bord du plasma. La température électronique est alors donnée par le bilan

$$\Phi_{Ee} = D_{Ee} \frac{n T_e}{\delta}$$

où δ est l'épaisseur de la couche ergodique et Φ_{Ee} est le flux d'énergie émis par le plasma à la frontière de la couche. La température ionique est donnée par un bilan analogue, où l'équipartition en énergie avec les électrons joue cependant un rôle essentiel :

$$\Phi_{Ei} = \delta \frac{n_H (T_i - T_e)}{\tau_{eq}} + D_{NH} \frac{n_H T_i}{\delta}$$

La température ionique ne peut être abaissée que si $D_N / \delta^2 < \tau_{eq}^{-1}$.
Nous avons alors T_i $(T_i > T_e)$ déterminée par :

$$T_i = \Phi_{Ei} \cdot \frac{\tau_{eq}}{n_H \delta}$$

Il existe effectivement un domaine de paramètres raisonnables où un tel contrôle de T_e et T_i est possible. Prenant $n = 2.10^{13} cm^{-3}$ dans la couche et $\Phi_{EH} \approx \Phi_{Ee} \sim 5 W cm^{-2}$, il est possible d'abaisser T_e et T_i en-dessous de 100 eV dans une épaisseur δ de l'ordre de 10 cm, à condition de

réaliser dans cette couche un coefficient $D_{QL} = D'_{QL} v_{th\,H} \sim 3.10^4 cm^2 s^{-1}$ ($\sim D_{NH}$). L'ergodisation correspondante, réalisée avec trois surfaces résonantes ($m = 2$, $\ell = (5, 6, 7)$), nécessite une perturbation magnétique δB de l'ordre du centième de la valeur nominale B_o du champ toroïdal.

Une autre possibilité pour le contrôle des températures dans la couche ergodique pourrait être d'augmenter l'ergodisation pour avoir D_{QL} très supérieur à D_{NH} et d'ajuster l'épaisseur de la couche ergodique de façon qu'elle corresponde à la profondeur de pénétration δ_{at} des atomes neutres recyclés par la paroi. Supposant que l'on ait aussi $D_{QL}/\delta^2 > \tau_{eq}^{-1}$, la température ionique est maintenant donnée par :

$$T_i = \frac{\Phi_{Ei}\,\delta}{n_H D_{QL}}$$

En fait ici le flux d'atomes neutres entrant dans la couche pour maintenir la densité est augmenté ; le plasma émet vers la paroi un plus grand nombre d'ions qui, pour transporter le même flux d'énergie Φ_{Ei} , ont une énergie individuelle plus faible. Cependant, la température ionique n'est pas affectée par ce mécanisme dans la zone au delà de la profondeur de pénétration δ_{at} . Il subsiste encore un flux d'atomes d'échange de charge énergiques émis dans cette zone vers la paroi.

Si la zone d'épaisseur $\delta_{at,H}$, où les atomes Hydrogène pénètrent dans le plasma avant d'être ionisés, est ergodique, un flux de recyclage d'ions Hydrogène le long des lignes de force apparaît dans cette zone. Ce flux est dû au gradient de pression et finalement, au flux d'énergie émis par le plasma. Ce flux d'ions Hydrogène peut entraîner par friction les ions impuretés le long des lignes de force, à condition que $\delta_{at,Z} < \delta_{at,H}$, c'est-à-dire que les atomes d'impuretés pénètrent moins profondément dans le plasma que les atomes Hydrogène. Il en est systématiquement ainsi, car les sections efficaces d'ionisation des impuretés sont au moins égales à celles des atomes H et la vitesse thermique de ces derniers est plus élevée. Dans ces conditions l'équation de continuité pour des ions impuretés Z peut être écrite dans la couche ergodique, en l'absence de sources, sour la forme $\Phi_z = 0$, où le flux Φ_z est donné par (112), c'est-à-dire :

$$n_z v_{QL} - (D_{Ez} + D_{Nz}) \frac{\partial n_z}{\partial r} = 0$$

où

$$v_{QL} = D'_{QL} \frac{n_{QLH}}{\delta} = D_{QL,H} / \delta$$

Il vient alors, si x est la distance à la paroi :

$$n_z = n_{z0} \exp\left(-\frac{x}{\delta} \frac{D_{QL,H}}{D_{Ez} + D_{Nz}}\right)$$

où la quantité n_{z0} est proportionnelle au flux d'ion Z émis par la paroi. Il apparaît donc que, pour un flux d'impureté fixé par la paroi, la densité d'ions impuretés dans le plasma est diminuée par le facteur $\exp(-D_{QL,H}/D_{Ez}+D_{Nz})$. La valeur de D_{Ez} donnée par (111) est toujours très inférieure à D_{QLH} ; il "suffit" donc de réaliser $D_{QL,H} \gg D_{NH}$ ($\sim 10^4 cm^2 s^{-1}$) pour purifier le bord du plasma.

Enfin un tel dispositif permettant de répartir le flux d'énergie sur toute la surface intérieure de la paroi de la chambre à vide en regard de la couche ergodique, permet de réduire notablement le flux d'énergie arrêté actuellement sur une petite partie de la surface du diaphragme contrôlant le rayon et la position du plasma.

CONCLUSION

Dans la première partie de notre travail nous avons adapté et mis sous forme plus directement utilisable un principe variationnel permettant de suivre l'évolution d'un plasma confiné et chaud. Nous avons montré que la forme standard à laquelle nous avions abouti pouvait s'étendre à des situations de plus en plus complexes rencontrées dans la réalité tout en conservant une expression simple. Nous n'avons fait cependant qu'effleurer la situation très importante où la perturbation produit des trajectoires stochastiques ; il est évident que l'examen de cette situation à l'aide des principes variationnels précédents, à condition d'y modifier quelques hypothèses qui nous ont servi de base, pourrait apporter des informations utiles pour l'examen des phénomènes mis en jeu dans la stochasticité.

Les applications que nous avons présentées de ces principes variationnels ont été limitées au Tokamak mais toute configuration magnétique confinant un plasma chaud est susceptible d'être traités par les mêmes formes standard $\delta\mathcal{U}$ en y introduisant les variables angulaires et d'action adaptées à la configuration magnétique. La liste des applications de cette méthode d'étude du Tokamak n'est bien sûr pas limitative et en particulier tous les phénomènes néoclassiques peuvent être abordés de manière relativement simple. Des effets non linéaires par rapport aux gradients de densité et de température pourraient par exemple être considérés. En ce qui concerne la théorie de la turbulence, les principes que nous avons étudiés peuvent s'appliquer pour former des relations de dispersion, calculer des coefficients de transport et même des niveaux de saturation dans des conditions complexes.

Enfin les résultats de nos calculs ont conduit à infléchir ou à proposer des expériences pour les machines Tokamak en projet : d'une part en réfléchissant sur le niveau de "ripple" admissible dans une machine à fort chauffage, et d'autre part, dans le but de décontaminer le plasma de ses impuretés lourdes, en proposant la mise en rotation de ce plasma, avec un moyen pratique de l'obtenir, ainsi que les deux schémas de "divertor" : le divertor à champ électrique H.F. et le divertor ergodique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.B. ROBINSON et I.B. BERNSTEIN,
Ann. Phys. (N.Y.) 18 (1962), 110.

[2] E. CANOBBIO,
in "Plasmas Physics and Controlled Fusion Research 1971" Vol. III,
p. 491, IAEA Vienna (1971).

[3] M.N. ROSENBLUTH, R.D. HAZELTINE et F.L. HINTON,
Phys. Fluids 15 (1972), 116.

[4] L. LANDAU,
Zh. Eksp. Teor.Fiz. 7 (1937), 203.

[5] S.I. BRAGINSKY,
in "Reviews of Plasma Physics " Vol. I, Consultants Bureau (N.Y.) (1965).

[6] M.D. KRUSKAL,
Journal Math. Phys. 3 (1962), 806.

[7] L. BRILLOUIN,
in "L'Atome de Bohr", chap. 6. P.U.F. (Paris), 1931.

[8] V.T. ARNOLD,
in "Mathematical Methods of Classical Mechanic", Chap. 10 ed. MIR (Moscou)
(1974).

[9] W.E. DRUMMOND et D. PINES,
Nuclear Fusion Supplement, Part 3, (1962), 1049.

[10] V.N. TSYTOVICH,
in "Theory of Turbulent Plasma" p. 95. Consultants Bureau (N.Y.) (1977).

[11] V.E. ZAKHAROV et V.I. KARPMAN,
JETP 43 (1962), 490.

[12] M.N. ROSENBLUTH, R.Z. SAGDEEV, J.B. TAYLOR et G.M. ZASLAVSKY,
Nuclear Fusion 6 (1966), 297.

[13] G.M. ZASLAVSKY et B.V. CHIRIKOV,
Sov. Phys. Usp. 14 (1972), 549.

[14] B.V. CHIRIKOV,
Thèse de Doctorat - Novosibirsk 1969. (CERN Translation n° 71.40).

[15] A.B. RECHESTER, M.N. ROSENBLUTH et R.B. WHITE,
Phys. Rev. Letters. 42, 1247.

[16] L. LANDAU,
Journal of Phys. U.S.S.R. 10 (1945), 25.

[17] J.B. TAYLOR et R.J. HASTIE,
Plasma Phys. 10 (1968), 479.

[18] L.A. ARSIMOVITCH,
Nuclear Fusion 12 (1972), 215.

[19] H.P. FURTH,
Nuclear Fusion 15 (1975), 487.

[20] A. SAMAIN,
Annales de Physique (Paris) 4 (1979), 395.

[21] L. SPITZER,
in "Physics of Fully Ionised Gases", Interscience Publishers (N.Y.) (1956).

[22] J.W. CONNOR,
Plasma Physics 15 (1973), 765.

[23] R. DEICAS et A. SAMAIN,
in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1974" Vol. I,
p. 563, IAEA Vienna (1975).

[24] A. SAMAIN et F. WERKOFF,
Nuclear Fusion 17 (1977), 53.

[25] S.P. HIRSCHMAN et D.J. SIGMAR,
Phys. Fluids 20 (1977), 418.

[26] N.A. UCKAN et al.
ORNL TM/5438, June 1976.

[27] G. REQUIN, B. GAGEY, J.P. GIRARD et A. SAMAIN,
Proc. 2nd Joint Grenoble Varenna Inter. Symposium on Heating in Toroïdal
Plasmas. C.E.C. (Brussels) EUR.FU.BRU.XII/894/80/CON/C(55).

[28] J.P. GIRARD, M. KHELLADI, D.A. MARTY,
Nuclear Fusion 13 (1973), 685.

[29] INTOR REPORT
IAEA Vienna, October 1979.

[30] M.N. ROSENBLUTH, P.H. RUTHERFORD, J.B. TAYLOR, E.A. FREEMAN, L.M. KOVRIZHNIKH
in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1971", IAEA
Vienna (1971) Vol. I, 495.

[31] R.D. HAZETINE et A.A. WARE,
Nuclear Fusion 16 (1976), 538.

[32] Equipe TFR,
in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1976", IAEA -
Vienna (1977), Vol. I, 35.

[33] R.J. GOLDSTON, E. MAZZUCATO, R.E. SLUSHER, C.M. SURKO,
in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1976" IAEA - Vienna (1977), Vol. I, 371.

[34] B.B. KADOMTSEV, O.P. POGUTSE,
in "Reviews of Plasma Physics" Consultant Bureau (N.Y.) (1970), p. 308.

[35] G. REQUIN et A. SAMAIN,
in "Plasma Physics and Controlled Fusion Research 1980" IAEA - Vienna (1981) IAEA-CN-38/Y.2.1.

[36] D.M. MEADE et al,
in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1974" IAEA-Vienna (1975), Vol. I, 605.

[37] R. DEICAS et A. SAMAIN,
in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1974" IAEA - Vienna (1975), Vol. I, 563.

[38] W. ENGELHARDT et W. FENEBERG,
Journal of Nuclear Materials 76/77 (1978), 518.

[39] A.F. KUCKES,
Plasma Physics 10 (1968), 367.

[40] T.H. STIX,
in "The Theory of Plasma Waves" Mac Graw-Hill (N.Y.) (1962) Chap. 10.

[41] D.G. SWANSON,
Physics of Fluids 18 (1975), 1269.

[42] R. DEICAS, G. REQUIN et A. SAMAIN,
Journal of Nuclear Materials 76/77 (1978), 542.

[43] Equipe TFR,
in "Plasma Physics and Controlled Fusion Research 1980" IAEA - Vienna (1981) - IAEA-CN-38/N.5.

[44] P.H. REBUT et A. SAMAIN,
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris. 268 (1969), 607.

ANNEXES

ANNEXE I - VARIABLES ANGULAIRES ET D'ACTION EN PRESENCE D'UN HAMILTONIEN PERTURBE

Nous examinons ici, d'une part l'existence d'un système de variables angulaires et d'action pour un Hamiltonien perturbé et d'autre part la topologie des trajectoires dans l'espace J, ϕ au voisinage de la surface de résonance.

Supposons qu'il existe, dans un domaine de l'espace des phases, un système de variables angulaires et d'action (ϕ_k, J_k) continues pour l'Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p})$. Considérons alors l'Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p}) + \delta H(\vec{x}, \vec{p})$ où $\delta H(\vec{x}, \vec{p})$ est une perturbation régulière :

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = h(J)$$

$$\delta H(\vec{x}, \vec{p}) = \sum_m \delta H_m(J) \exp i m_k \phi_k$$

Les lois du mouvement sont données par :

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \frac{\partial (H + \delta H)}{\partial J_k} = \frac{\partial h(J)}{\partial J_k} + \frac{\partial \delta H_{000}}{\partial J_k} + \sum_{m \neq (000)} \frac{\partial \delta H_m}{\partial J_k} \exp i m_k \phi_k$$

$$\frac{dJ_k}{dt} = -\frac{\partial (H+\delta H)}{\partial \phi_k} = -\sum_{m \neq (000)} i m_k \delta H_m(J) \exp i m_k \phi_k \qquad \text{(A.1)}$$

A l'ordre 0 en δH, les équations du mouvement sont :

$$\phi_k = \omega_k(\bar{J}).t + \bar{\phi}_k$$

$$J_k = \bar{J}_k \qquad \text{(A.2)}$$

où $\omega_k(\bar{J}) = \partial h(J)/\partial J_k$ et $\bar{J}_k, \bar{\phi}_k$ sont des constantes. Cette relation exprime que les variables J_k, ϕ_k sont bien un système de variables angulaire et d'action pour l'Hamiltonien $h(J)$.

Maintenant poursuivons à l'ordre 1 en δH le développement des équations du mouvement (A.1) :

$$\phi_k = (\omega_k(\bar{J}).t + \bar{\Phi}_k) + \frac{\partial \delta H_{000}(\bar{J})}{\partial J_k}.t + \frac{\partial^2 \delta H_{000}(\bar{J})}{\partial J_k \partial J_\ell}(J_\ell - \bar{J}_\ell).t + \sum_{m\neq(0,0,0)} \int \frac{\partial \delta H_m(J)}{\partial J_k} \exp i\, m_k \phi_k \, dt$$

$$J_k = \bar{J}_k - \sum_{m\neq(0,0,0)} i\, m_k\, \delta H_m(\bar{J}) \int \exp i\, m_k \phi_k \, dt$$

C'est-à-dire encore :

$$J_k = \bar{J}_k - \sum_{m\neq(0,0,0)} i\, m_k\, \delta H_m(\bar{J}) \quad \frac{\exp i\, m_k(\bar{\Phi}_k + \omega_k(\bar{J})t)}{i\, m_\ell\, \omega_\ell}$$

$$\phi_k = \bar{\Phi}_k + \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\partial \delta H_m(J)}{\partial J_k} \quad \frac{\exp i\, m_k(\bar{\Phi}_k + \omega_k(\bar{J})t)}{i\, m_\ell\, \omega_\ell} \qquad \text{(A.3)}$$

$$+ t\left[\omega_k(\bar{J}) + \frac{\partial \delta H_{000}(\bar{J})}{\partial J_k} - \frac{\partial^2 \delta H_{000}}{\partial J_k \partial J_p} \cdot \sum_{m\neq 0,0,0} i\, m_p \frac{\delta H_m(\bar{J}) \exp i\, m_k(\bar{\Phi}_k + \omega_k(\bar{J})t)}{i\, m_\ell\, \omega_\ell}\right]$$

Ceci étant valable à condition que $\delta H_m(J) = 0$ pour les valeurs de J telles que $m_k\, \omega_k = 0$, c'est-à-dire pour une perturbation non résonante.

Introduisons alors la variable :

$$K(J,\phi) = \sum_{m\neq(0,0,0)} \delta H_m(J) \quad \frac{\exp i\, m_k \phi_k}{i\, m_k\, \omega_k}$$

$$= \sum_{m\neq 0,0,0} K_m(J) \exp i\, m_k \phi_k$$

et les variables :

$$J'_k = J_k + \frac{\partial K(J,\phi)}{\partial \phi_k}$$

$$\phi'_k = \Phi_k - \frac{\partial K(J,\phi)}{\partial J_k} \qquad \text{(A.4)}$$

Le système d'équation (A.3) se met alors sous la forme :

$$J'_k = \bar{J}_k$$

$$\phi'_k = \bar{\Phi}_k + t\left[\omega_k(\bar{J}) + \frac{\partial \delta H_{000}(\bar{J})}{\partial J_k} + \mathcal{O}(\delta H^2)\right] \qquad \text{(A.5)}$$

c'est-à-dire, au premier ordre en δH :

$$J'_k = \bar{J}_k$$

$$\phi'_k = \bar{\Phi}_k + \omega'_k(J).t$$

où $\bar{J}_R$, $\bar{\Phi}_R$ sont les constantes définies précédemment et $\omega'_R(J') = \partial(h(J) + \delta H_{000}(J)) / \partial J'_R$; le système J'_R , Φ'_R , vérifie donc les équations du mouvement analogues à (A.2) en présence de l'Hamiltonien $h'(J') = h(J) + \delta H_{000}(J)$. D'autre part on peut vérifier que au 1er ordre en δH c'est bien un système de variables canoniquement conjuguées : $\{ \Phi'_R , J'_\ell \} = \delta_{\ell R} + \mathcal{O}(\delta H^2)$; $\{ \Phi'_R , \Phi'_\ell \} = \mathcal{O}(\delta H^2)$ et $\{ J'_R , J'_\ell \} = \mathcal{O}(\delta H^2)$.

Ainsi un Hamiltonien $H + \delta H$, pour lequel δH s'annulle aux points où $m^*_R (\partial h / \partial J_R) = 0$ accepte comme système de variables angulaires et d'action le système (A.4), prenons comme application un Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p}, t) = H(\vec{x}, \vec{p}) + \delta H(\vec{x}, \vec{p}, t)$ variable au cours du temps nous posons :

$$\delta H = \sum_m \delta H_m(J) \exp i m_R \Phi_R$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_m \dot{H}_m(J) \exp i m_R \Phi_R$$

Supposant qu'il existe des points sur la surface $m^*_R (\partial h / \partial J_R) = 0$ où $\dot{H}_m = 0$, la démonstration précédente nous permet d'affirmer à chaque instant l'existence des variables J_R , Φ_R pour $H(\vec{x}, \vec{p}, t)$ données par : [10] [44]

$$\frac{dJ_R(\vec{x}, \vec{p}, t)}{dt} = \frac{\partial K(J_R, \Phi_R)}{\partial \Phi_R} \qquad (A.6)$$

$$\frac{d\Phi_R}{dt} = - \frac{\partial K(J_R, \Phi_R)}{\partial J_R}$$

où $K = \sum_{m \neq (0,0,0)} \dot{H}_m \frac{\exp i m_R \Phi_R}{i m_R \omega_R}$.

Soit maintenant une petite perturbation résonante que l'on ajoute à l'Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p})$ admettant le système de variables angulaires et d'action (Φ_R , J_R) ; nous poserons

$$\delta H = \lambda(J) \cos(m^*_R \Phi_R + \omega t)$$

où le triplet d'entiers $m^* = (m_1^*, m_2^*, m_3^*)$ est fixé. Cette perturbation est résonante sur la surface d'équation :

$$\omega + m^*_R \frac{\partial h(J)}{\partial J_R} = \Omega(J) = 0$$

A une certaine distance de la surface de "résonance" dans l'espace des phases,

la perturbation δH est non résonante et nous pouvons utiliser les résultats qui précèdent pour construire les variables angulaires et d'action correspondant à $H + \delta H$. Ces variables ne sont définies qu'à l'extérieur d'un petit "domaine piégé" de l'espace des phases au voisinage de la surface de résonance.

Les trajectoires dans l'espace J en présence de $H + \delta H$ ont pour équation :

$$\frac{dJ_R}{dt} = -\frac{\partial (H+\delta H)}{\partial \phi_R} = n_R^* s(J) \sin (n_R^* \phi_R + \omega t)$$

le mouvement a donc lieu sur une droite parallèle à la direction $n^* = (n_1^*, n_2^*, n_3^*)$. A chaque point J nous associons le point $J_R(J)$ sur la surface de résonance et le scalaire $\lambda(J)$ définis par (Fig. A.1) :

$$J_R = J_{RR}(J) + n_R^* \lambda$$

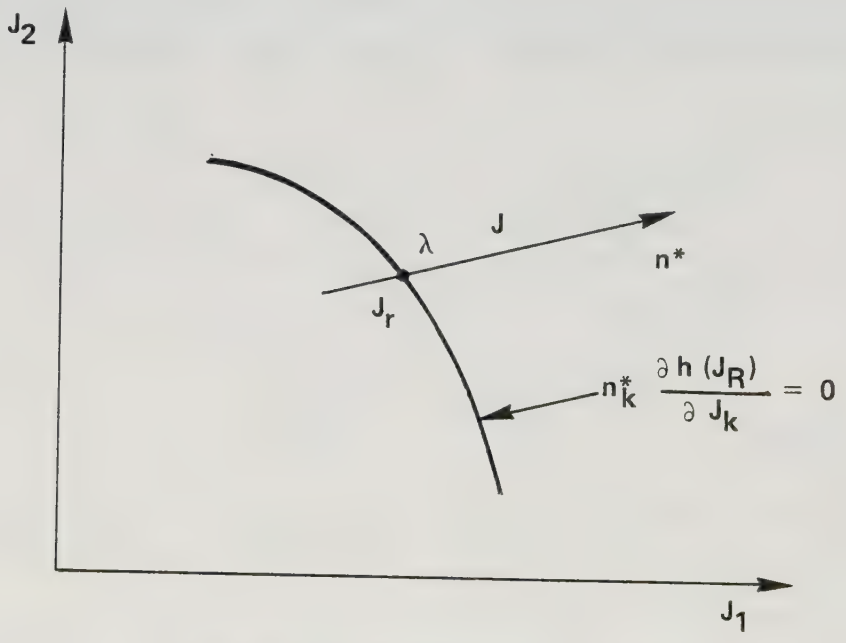


FIG. A1 — **Repérage du mouvement au voisinage de la surface de résonance.**

Le point $J_R(J)$ est invariant lors du mouvement de la particule. Posant $\varphi = \omega t + n_R^* \phi_R$, les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d\lambda}{dt} = s(J) \sin \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = n_R^* \left(\frac{\partial h(J_R + \lambda n^*)}{\partial J_R} + \frac{\partial s}{\partial J_R} \cos \varphi \right)$$

Nous introduisons alors les variables :

$$\alpha = n_R^* n_\rho^* \frac{\partial^2 h(J_R)}{\partial J_R \partial J_\rho}$$

$$w = H + \delta H - h(J_R)$$

w est évidemment une constante du mouvement, et nous pouvons écrire, au voisinage de la surface de résonance, en supposant que la direction n^* n'est pas parallèle à cette surface :

$$w = \frac{1}{2} \alpha \lambda^2 + s(J_R) \cos \varphi$$

Supposant $(s(J_R)/\alpha) > 0$, les trajectoires dans le plan J, φ ont la structure indiquée sur la figure (A.2). Cette structure est différente

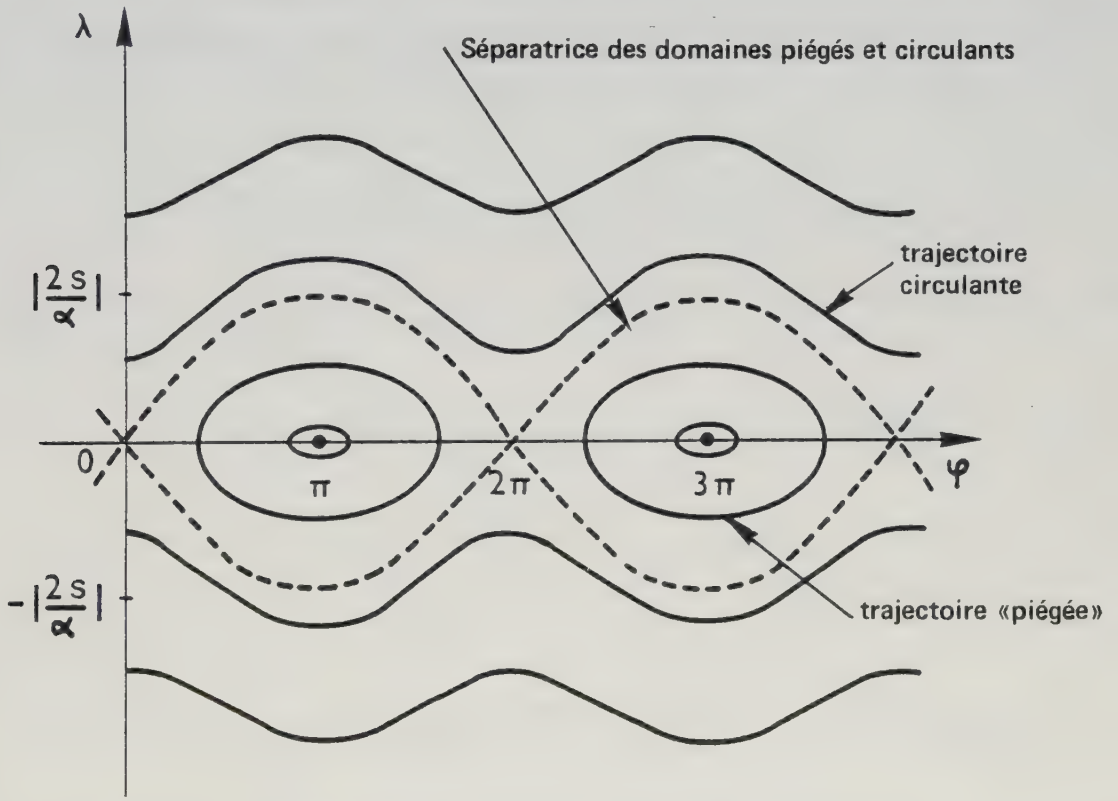


FIG. A2 — Trajectoires au voisinage de la surface de résonance

dans le domaine "circulant" et le domaine "piégé" séparés par une frontière d'équation :

$$\frac{1}{2} \alpha \lambda^2 + s(J_R) \cos \varphi = s(J_R)$$

la largeur en λ du domaine piégé peut ainsi être définie par

$$|\lambda| < \left| 2 \frac{\Delta}{\alpha} \right|^{1/2} = \lambda_T$$

et comme $\omega + m_k^* \left(\partial h(J,t) / \partial J_k \right) = \alpha \lambda$:

$$\left| \omega + m_k^* \frac{\partial h(J,t)}{\partial J_k} \right| = |\Omega| < 2 |\alpha \Delta|^{1/2}$$

c'est ainsi que l'on définit la demi largeur en $\Omega = \omega + m_k^* (\partial h / \partial J_k)$ du domaine piégé par :

$$\Delta \Omega_T = |\alpha \Delta|^{1/2}$$

ANNEXE II - GENERALISATION DU PRINCIPE VARIATIONNEL SIMPLIFIE EN PRESENCE D'UNE PERTURBATION DE L'HAMILTONIEN

Nous établissons ici l'expression de la correction $\delta\mathcal{M}(\underline{U})$ à apporter à la fonctionnelle $\mathcal{M}(\underline{U})$ pour étendre le principe variationnel (2) au cas d'un Hamiltonien perturbé.

Nous commençons par mettre la variable $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ définie par (1) en présence de l'Hamiltonien $\mathcal{H}(\vec{x},\vec{p},t) = h(J,t) + \delta H$ (où la perturbation δH est de la forme (23)) sous la forme :

$$\mathcal{U}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t) = \mathcal{U}_{\alpha_0}(J,\phi,t) = U_{\alpha_0}(J,t) + \delta U(J,\phi,t)$$

où $U_{\alpha_0}(J,t)$ est donné par (26). La fonction de distribution de l'assemblée α_0 prend alors la forme :

$$\mathcal{F}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t) = \mathcal{F}_{\alpha_0}(J,\phi,t) = f_{\alpha_0}(J,t)\ \exp -\frac{\delta H - \delta U}{T} \qquad (A.7)$$

Nous pouvons éliminer le terme $\sigma(J)$ dans l'expression (23) de δH en l'ajoutant aux fonctions $h(J,t)$, et $U_\alpha(J,t)$ figurant dans $f_{\alpha_0}(J,t)$. La contrainte (25) sur la fonction de distribution $f_{\alpha_0}(J,t)$ s'écrit alors :

$$\int\cdots f_{\alpha_0}(J,t)\,\mathcal{D}(J)\left(\frac{\delta U}{T} + \frac{\delta U^2}{T^2} - \frac{\delta H\,\delta U}{T^2} - \frac{\delta^2}{4T} + \ldots\right) d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} = 0 \qquad (A.8)$$

De même la variable $\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p})$ au voisinage de $\mathcal{U}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)$ peut s'écrire :

$$\underline{\mathcal{U}}_{\alpha}(J,\phi) = \underline{U}_{\alpha}(J) + \underline{\delta U}(J,\phi,t)$$

où $\underline{\delta U}$ doit satisfaire la condition (A.8).
Exprimons alors, à l'aide de ces variables de fonctionnelle $\mathcal{M}(\underline{\mathcal{U}})$(2). Le premier terme contient l'expression $d\,\mathcal{F}_{\alpha_0}(\vec{x},\vec{p},t)/dt$ qui se développe de la façon suivante :

$$\frac{d\,\mathcal{F}_{\alpha_0}(J,\phi,t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_0}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_0}}{\partial J_k}\cdot\frac{dJ_k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_0}}{d\phi_k}\cdot\frac{d\phi_k}{dt}$$

où dJ_R/dt et $d\phi_R/dt$ sont donnés dans l'Annexe I par (A.6). Le premier terme de la fonctionnelle $\mathcal{M}(\underline{\mathcal{U}})$ s'écrit alors :

$$\frac{2}{T}\int\cdots\frac{d\mathcal{F}_{\alpha_0}}{dt}\,\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0}\,d_3x\,d_3p\,\frac{d\omega t}{2\pi}=\frac{2}{T}\int\cdots\frac{\partial\mathcal{F}_{\alpha_0}}{\partial t}\,\underline{U}_{\alpha_0}(J)\,d_3J\,d_3\phi\,\frac{d\omega t}{2\pi}+\frac{2}{T}\int\cdots\mathcal{F}_{\alpha_0}\frac{\partial\underline{U}_{\alpha_0}}{\partial J_R}\,\frac{\partial(K+\delta H)}{\partial\phi_R}\,d_3J\,d_3\phi\,\frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$+\frac{2}{T}\int\cdots\left(\frac{\partial\mathcal{F}_{\alpha_0}}{\partial t}-\frac{\partial\mathcal{F}_{\alpha_0}}{\partial J_R}\cdot\frac{\partial(K+\delta H)}{\partial\phi_R}+\frac{\partial\mathcal{F}_{\alpha_0}}{\partial\phi_R}\cdot\frac{\partial(h+K+\delta H)}{\partial J_R}\right)\delta\underline{U}\,d_3J\,d_3\phi\,\frac{d\omega t}{2\pi}$$

où toutes les variables dynamiques sont exprimées en fonction des variables J, ϕ, t et la variable K est donnée par (A.6). Utilisant la définition de la fonction régularisée $f_{\alpha_0}(J,t)$, l'équation précédente s'écrit, au second ordre en δU, $\underline{\delta U}$, δH et K :

$$\frac{2}{T}\int\cdots\frac{d\mathcal{F}_{\alpha_0}}{dt}\,\underline{\mathcal{U}}_{\alpha_0}\,d_3x\,d_3p\,\frac{d\omega t}{2\pi}=\frac{2}{T}\iint\frac{\partial f_{\alpha_0}(J,t)}{\partial t}\,\underline{U}_{\alpha_0}(J)(2\pi)^3d_3J\,\frac{d\omega t}{2\pi}+\frac{2}{T}\int-f_{\alpha_0}\frac{\partial\underline{U}_{\alpha_0}}{\partial I_R}\,\frac{\partial(K+\delta H)}{\partial\phi_R}\,\frac{\delta U.\delta H}{T}\,d_3J\,d_3\phi$$

$$+\frac{2}{T}\int\cdots\left\{\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t}-\frac{f_{\alpha_0}}{T}\frac{\partial\delta H}{\partial t}+\frac{f_{\alpha_0}}{T}\frac{\partial\delta U}{\partial t}-\left(\frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial J_R}+\frac{f_{\alpha_0}}{T}\frac{\partial\delta U}{\partial J_R}\right)\frac{\partial(K+\delta H)}{\partial\phi_R}+\frac{f_{\alpha_0}}{T}\frac{\partial(\delta U+\delta H)}{\partial\phi_R}\frac{\partial h}{\partial J_R}\right\}\delta\underline{U}\,d_3J\,d_3\phi\,\frac{d\omega t}{2\pi}\qquad(A.9)$$

D'autre part, le second terme de la fonctionnelle $\mathcal{M}(\underline{\mathcal{U}})$ s'écrit :

$$\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})=\dot{S}(\underline{U})-\frac{2}{T}\int\cdots\mathcal{D}(\underline{U}_{\alpha_0})\,\delta\underline{U}\,d_3J\,d_3\phi-\frac{1}{T}\int\cdots\mathcal{D}(\delta\underline{U})\,\delta\underline{U}\,d_3J\,d_3\phi\qquad(A.10)$$

où nous avons introduit

$$\dot{S}(\underline{U})=\dot{S}\left(\underline{U}_{\alpha_0}(J),\,\underline{\mathcal{U}}_0(\alpha\neq\alpha_0)\right)$$

$$\mathcal{D}(\underline{U})=\mathcal{D}\left(\underline{U}_{\alpha_0}(J),\,\underline{\mathcal{U}}_0(\alpha\neq\alpha_0)\right)$$

$$\mathcal{D}(\delta\underline{U})=\mathcal{D}\left(\delta\underline{U},\,\underline{\mathcal{U}}_0(\alpha\neq\alpha_0)=0\right)$$

L'extrémalisation de la fonctionnelle $\mathcal{M}(\underline{\mathcal{U}})$ peut alors se faire en deux temps, une première extrémalisation par rapport à $\delta\underline{U}$, à $\underline{U}_{\alpha_0}$ et $\underline{\mathcal{U}}_0(\alpha\neq\alpha_0)$ fixés et ensuite l'extrémalisation par rapport à $\underline{U}_{\alpha_0}$ et $\underline{\mathcal{U}}_0(\alpha\neq\alpha_0)$. Compte tenu du choix de $\underline{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{U}$, la différence $\underline{\delta U}-\delta U$ est évidemment proportionnelle aux différences $\underline{U}_{\alpha_0}-U_{\alpha_0}$, $\underline{\mathcal{U}}_0(\alpha\neq\alpha_0)-\mathcal{U}(\alpha\neq\alpha_0)$. Le résultat de la première extrémalisation est donc équivalent, au premier ordre en $\underline{U}-U$, $\underline{\mathcal{U}}(\alpha\neq\alpha_0)-\mathcal{U}(\alpha\neq\alpha_0)$, à remplacer $\underline{\delta U}$ par sa valeur extrémum et réelle δU, celle-ci résulte de l'extrémalisation, compte tenu de la contrainte (A.8), de la fonctionnelle $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}(\delta\underline{U}) = \int\ldots\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{f}{T}\frac{\partial \delta H}{\partial t} + \frac{f}{T}\frac{\partial \delta U}{\partial t} - \left(\frac{\partial f}{\partial J_R} + \frac{f}{T}\frac{\partial \delta U}{\partial J_R}\right)\frac{\partial(K+\delta H)}{\partial \phi_R} + \frac{f}{T}\frac{\partial(\delta U - \delta H)}{\partial \phi_R}\frac{\partial h}{\partial J_R} \right\} \delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$- \int\ldots \mathfrak{D}(U)\, \delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} - \frac{1}{2}\int\ldots \mathfrak{D}(\delta\underline{U})\, \delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

Nous pouvons simplifier cette expression en introduisant la variable régulière $W_{000}(J,t)$ variant lentement dans le temps et la variable $W'(J,\phi,t)$ spécifiées par (19), de même nous transformons les intégrales $\int\ldots(\partial f/\partial t)\,\delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, d\omega t/2\pi$ et $\int\ldots W_{000}\,\delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, d\omega t/2\pi$ à l'aide de (A.8) et enfin nous utilisons le fait que $\partial f_{\alpha_0}/\partial J_R = (f_{\alpha_0}/T)(-\partial h/\partial J_R - \partial U_{\alpha_0}/\partial J_R)$. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{C}(\delta\underline{U}) = \mathcal{C}_{NL}(\delta\underline{U}) + \mathcal{C}_{\delta H}(\delta\underline{U}) + \mathcal{C}_{W'}(\delta\underline{U}) + \mathcal{C}_{K}(\delta\underline{U}) \qquad (A.11)$$

$$\mathcal{C}_{NL}(\delta\underline{U}) = \int\ldots\left\{ \left(W_{000} - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\delta\underline{U}}{2T} + \frac{f}{T}\frac{\partial \delta\underline{U}}{\partial t} - \frac{f}{T}\frac{\partial \delta\underline{U}}{\partial J_R}\frac{\partial(K+\delta H)}{\partial \phi_R} + \frac{f}{T}\frac{\partial \delta\underline{U}}{\partial \phi_R}\frac{\partial h}{\partial J_R} \right\} \delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$- \frac{1}{2}\int\ldots \mathfrak{D}(\delta\underline{U})\, \delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$\mathcal{C}_{\delta H}(\delta\underline{U}) = \int\ldots\left\{ -\left(W_{000} - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\delta H}{2T} - \frac{f}{T}\frac{\partial \delta H}{\partial t} - \frac{f}{T}\frac{\partial U}{\partial J_R}\frac{\partial \delta H}{\partial \phi_R} \right\} \delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$\mathcal{C}_{W'}(\delta\underline{U}) = -\int\ldots W'\,\delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$\mathcal{C}_{K}(\delta\underline{U}) = -\int\ldots \frac{\partial f}{\partial J_R}\frac{\partial K}{\partial \phi_R}\,\delta\underline{U}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

En remplaçant dans $\mathcal{M}(\underline{U})$ la variable $\delta\underline{U}$ par sa valeur δU déduite de l'extrémalisation de $\mathcal{C}$ et compte tenu des expressions (A.9) et (A.10), nous obtenons, au premier ordre en $\underline{U}_{\alpha_0} - U_{\alpha_0}$, $\underline{U}_\alpha\,(\alpha \neq \alpha_0) - U_\alpha\,(\alpha \neq \alpha_0)$:

$$\mathcal{M}(\underline{U}) = \frac{2}{T}\iiint \frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t}\,\underline{U}_{\alpha_0}\,(2\pi)^3\, d_3J + \sum_{\alpha \neq \alpha_0}\frac{2}{T}\int\ldots \frac{dJ_\alpha}{dt}\,\underline{U}_\alpha\, d_3x\, d_3p\, \frac{d\omega t}{2\pi} + \int \dot{S}(\underline{U})\,\frac{d\omega t}{2\pi} + \delta\mathcal{M}(\underline{U})$$

où

$$\delta\mathcal{M}(\underline{U}) = -\frac{2}{T}\int\ldots \mathfrak{D}(\underline{U})\,\delta U\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} - \frac{2}{T^2}\int\ldots \frac{\partial \underline{U}_{\alpha_0}}{\partial J_R} f_{\alpha_0}\left(K\frac{\partial(\delta U - \delta H)}{\partial \phi_R} + \delta H\frac{\partial \delta U}{\partial \phi_R}\right) d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

si nous introduisons maintenant la variable régulière $\underline{W}_{000}(J,t)$ et la variable $\underline{W}'(J,\phi,t)$ qui sont des fonctionnelles de $\underline{U}(J,t)$ spécifiées par :

$$\mathcal{D}(\underline{U}) = \underline{W}_{000}(J,t) + \sum_{(m,\nu)\neq(000,0)} \underline{W}_{m,\nu}(J,t) \exp i(m_R \phi_R + \nu\omega t) = \underline{W}_{000}(J,t) + \underline{W}'(J,\phi,t) \qquad (A.12)$$

et si nous utilisons encore (A.8), la fonctionnelle $\delta \mathcal{M}(\underline{U})$ s'écrit :

$$\delta\mathcal{M}(\underline{U}) = \mathcal{P} + \frac{1}{T}\iiint \underline{W}_{000}\frac{\partial^2}{2I}(2\pi)^3 d_3J - \frac{2}{T}\int\cdots \underline{W}'\,\delta U\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$- \frac{2}{T^2}\int\cdots \frac{\partial \underline{U}}{\partial J_R} F_{\kappa_0}\left(\delta H \frac{\partial \delta U}{\partial \phi_R} + \kappa\left(\frac{\partial \delta U}{\partial \phi_R} - \frac{\partial \delta H}{\partial \phi_R}\right)\right) d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} \qquad (A.13)$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T}\int\cdots W_{000}\left(\frac{-2\delta H\,\delta U + \delta U^2}{T}\right) d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

Ce terme $\mathcal{P}$ sera négligé dans la suite comme étant d'un ordre très inférieur au terme $\int \dot{S}(\underline{U})\, d\omega t/2\pi$.

Si δH est nul, l'extrémalisation de $\mathcal{C}(\delta\underline{U})$ donne, au premier ordre en κ et W' qui sont de faibles quantités :

$$\delta U = \sum_m \delta U_m(J,t) \exp i m_R \phi_R$$

où
$$\delta U_{m\neq(0,0,0)} = \frac{T}{f}\left(m_R \frac{\partial f_{\kappa_0}}{\partial J_R}\kappa_m - i W_m\right)\left(\mathcal{O}(m_R\, \partial h/\partial J_R)\right)^{-1}$$

$$\kappa_m(J,t) = -\frac{\dot{H}_m(J,t)}{i\, m_R \frac{\partial h}{\partial J_R}}$$

et $\delta\mathcal{M}$ s'écrit alors d'après (A.13)

$$\delta\mathcal{M}(\underline{U}) = -\iiint \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{2i}{f}\left(m_R\frac{\partial f}{\partial J_R}\kappa_m - i W_m\right)\left(m_R\frac{\partial \underline{U}}{\partial J_R}\frac{f}{T}\kappa_m^* - i W_m^*\right)\left(\mathcal{O}\left(m_R\frac{\partial h}{\partial J_R}\right)\right)^{-1}(2\pi)^3 d_3J$$

dont une estimation est la quantité $\mathcal{Z}$ donnée par (21). D'une manière plus générale maintenant, $\delta H \neq 0$, la variable δU résultant de l'extrémalisation de la fonctionnelle $\mathcal{C}(\delta\underline{U})$ par rapport à $\underline{\delta U}$ est une somme de termes proportionnels aux coefficients de $\underline{\delta U}$ figurants dans $\mathcal{C}_{\delta H}$, $\mathcal{C}_{W'}$ et $\mathcal{C}_{\kappa}$, c'est-à-dire proportionnels à δH , W' et κ respectivement :

$$\delta U = \delta U_{\delta H} + \delta U_{W'} + \delta U_{\kappa}$$

La fonctionnelle $\delta\mathcal{M}$ (A.13) se décompose alors en une somme :

$$\delta\mathcal{M}(\underline{U}) = \frac{1}{T}\iiint \underline{W}_{000}(J,t)\frac{\partial^2}{2T}(2\pi)^3 d_3J + \delta\mathcal{M}_1(\underline{U}) + \delta\mathcal{M}_2(\underline{U}) + \delta\mathcal{M}_3(\underline{U}) \qquad (A.14)$$

où :

$$\delta \dot{\mathcal{M}}_1(\underline{U}) = -\frac{2}{T^2}\int\cdots \frac{\partial \underline{U}}{\partial J_\ell}\, f\, \delta H\, \frac{\partial \delta U_{\delta H}}{\partial \phi_\ell}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$\delta \dot{\mathcal{M}}_2(\underline{U}) = -\frac{2}{T}\int\cdots\left\{ \underline{w}'\delta U_{\delta H} + \frac{f}{T}\frac{\partial \underline{U}}{\partial J_\ell}\left(\delta H\,\frac{\partial(\delta U_{w'}+\delta U_K)}{\partial \phi_\ell} + K\frac{\partial(\delta U_{\delta H}-\delta H)}{\partial \phi_\ell}\right)\right\} d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} \qquad \text{(A.15)}$$

$\delta\dot{\mathcal{M}}_2(\underline{U})$ est proportionnel à $\delta H . w'$, $\delta H . K$ et de même $\delta\dot{\mathcal{M}}_3(\underline{U})$ est proportionnel à K^2 , w'^2 , $K w'$ et est donc de l'ordre de $\mathcal{X}$. Tant que $\mathcal{X}$ est petit par rapport à $\delta\dot{\mathcal{M}}$ on peut en principe négliger les effets de K et w' et réduire l'expression de $\delta\dot{\mathcal{M}}$ à la fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{M}}_1$ seule.
Nous verrons en fait que $\delta\dot{\mathcal{M}}_1$ est faible si la quantité $f(\omega + m_\ell^* \frac{\partial \underline{U}}{\partial J_\ell})$ est petite sur la surface de résonance $\omega + m_\ell^* \frac{\partial h}{\partial J_\ell} = 0$; dans ce cas nous garderons la fonctionnelle $\delta\dot{\mathcal{M}}_2$.

Pour calculer celle-ci nous remarquons que d'après (A.12) nous n'avons besoin que des composantes $(m, \nu) \neq (0,0,0,0)$ dans la décomposition de Fourier :

$$\delta U_{\delta H} = \sum_{m,\nu} (\delta U_{\delta H})_{m,\nu}\, \exp i(m_\ell \phi_\ell + \nu\omega t)$$

et des composantes $(m, \nu) = \pm(m^*, 1)$ dans les décompositions analogues de $\delta U_{w'} + \delta U_K$. Les premières seront calculées ci-dessous pour obtenir l'expression de $\delta\dot{\mathcal{M}}_1(\underline{U})$, quant aux composantes $(m, \nu) = \pm(m^*, 1)$ de $\delta U_{w'} + \delta U_K$, elles ont la même dépendance linéaire par rapport au coefficient de $\underline{\delta U}$ dans $\mathcal{C}_{w'} + \mathcal{C}_K$ que les composantes de Fourier $m = \pm m^*$ de $\delta U_{\delta H}$ par rapport au coefficient de $\underline{\delta U}$ dans $\mathcal{C}_{\delta H}$, et peuvent donc être calculées par la même technique. Tous calculs faits il vient :

$$\delta\dot{\mathcal{M}}_2(\underline{U}) = -\frac{2}{T}\,\mathcal{PP}\int\cdots\left(\underline{w}'\,\frac{\omega + m_\ell^*\frac{\partial U}{\partial J_\ell}}{\omega + m_\ell^*\frac{\partial h}{\partial J_\ell}} + w'\,\frac{m_\ell^*\frac{\partial \underline{U}}{\partial J_\ell}}{\omega + m_\ell^*\frac{\partial h}{\partial J_\ell}}\right)\delta H\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} \qquad \text{(A.16)}$$

$$-\frac{2}{T}\left[\int\cdots i\pi\eta(J)\,\underline{w}'\left(\omega + m_\ell^*\frac{\partial U}{\partial J_\ell}\right)\frac{\Delta}{2}\exp i(m_\ell^*\phi_\ell + \omega t)\,\delta\!\left(\omega + m_\ell^*\frac{\partial h}{\partial J_\ell}\right) d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} + C.C.\right]$$

où $\eta(J)$ sur la surface de résonance est égal à 1 dans le cas a) ou cas Landau du paragraphe A.II et à 0 dans le cas b) ou cas Zakhanov et Karpman. Le second terme figurant dans $\delta\dot{\mathcal{M}}_2$ correspond à des effets de résonance induits par w'. Il a été simplifié d'abord en tenant compte du fait que cette expression de $\delta\dot{\mathcal{M}}_2$, ne sera utilisé que pour des variations $\underline{dU}$ de $\underline{U}$ telles que $d(m_\ell^*\frac{\partial \underline{U}}{\partial J_\ell}) = 0$ sur la surface de résonance $\omega + m_\ell^*\frac{\partial h}{\partial J_\ell} = 0$, et donc les intégrales sur

cette surface qui étaient proportionnelles à $m_k^* \frac{\partial U}{\partial J_k}$ ont été laissées de côté, et ensuite en examinant le second terme de (A.16) dans le cas b) où il est réduit par le facteur $I(o, J, t) / (\pi \delta^2/2)$ et se trouve donc négligeable par rapport au premier terme.

Calculons maintenant la fonctionnelle $\delta \dot{d}_1$ donnée par (A.15), avec $\delta U_{\delta H}$ obtenue par l'extrémalisation de $\mathcal{E}_{NL}(\underline{\delta U}) + \mathcal{E}_{\delta H}(\underline{\delta U})$ (avec $\kappa = 0$, pour ne tenir compte que des effets dus à δH) par rapport à $\underline{\delta U}$ satisfaisant à l'équation de contrainte (A.8). Nous notons tout d'abord que la différence $\partial f / \partial t - W_{ooo}$ est proportionnelle à $\delta \dot{d}_0$ (d'après l'équation (18)), ceci implique que les termes proportionnels à cette différence dans $\mathcal{E}_{NL}$ et $\mathcal{E}_{\delta H}$ apporterons à $\delta \dot{d}_0$ une correction qui tendra vers 0 plus vite que $\delta \dot{d}_0$ et nous pourrons donc les négliger. Pour simplifier nous ferons l'hypothèse que l'assemblée de particules considérée comprend très peu de particules de telle sorte que l'intégrale $\int \ldots \mathcal{D}(\underline{\delta U})\, \underline{\delta U}\, d_3x\, d_3p\, d\omega t / 2\pi$ définie par (7), (3), (6) et (A.10) se réduit à :

$$\int \ldots \mathcal{D}(\underline{\delta U})\, \underline{\delta U}\, d_3x\, d_3p\, \frac{d\omega t}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \int \ldots \langle \delta p_r \delta p_s \rangle \frac{\partial \delta U}{\partial p_r} \frac{\partial \delta U}{\partial p_s} f(J,t)\, d_3x\, d_3p\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

De fait cette simplification n'entraîne aucune perte de généralité car les calculs que nous faisons peuvent être immédiatement généralisables lorsque l'on doit prendre en compte plusieurs assemblées interagissantes $f_\alpha(J, t)$. Introduisons les variables $\lambda(J, t)$ proportionnelles à la distance comptée dans l'espace J d'un point (J, Φ) à la surface de résonance $\Omega(J, t) = \omega + m_k^* \partial h / \partial J_k = 0$ et le point $J_R(J, t)$ sur cette surface, définis dans l'Annexe I (fig. A.1). Au voisinage de la surface de résonance, nous avons $\Omega = \alpha \lambda$ où α est donné par (24). Les lois du mouvement (A.1) indiquent que le point J_R suit une ligne droite parallèle à la direction m^*. Comme $\Omega(J_R, t) = 0$ nous avons :

$$\frac{\partial J_R(J,t)}{\partial t} = m^* V_R \quad ; \quad \frac{\partial \lambda(J,t)}{\partial t} = -V_R \quad ; \quad V_R = -\frac{1}{\alpha} m_k^* \frac{\partial^2 h}{\partial J_k \partial t}$$

La variation dJ_R / dt correspond à un déplacement de la surface de résonance dans l'espace J, cette variation joue un rôle négligeable si la surface de résonance subit de faibles déplacements par rapport à l'extension $\lambda_p \sim \Omega_p / \alpha$ de l'assemblée dans la direction m^*, durant le temps caractéristique de la mise en équilibre de la distribution de particule au voisinage de cette surface, ce temps sera calculé dans la suite ; cette situation est décrite par la condition (30).

Faisons l'hypothèse, vérifiable à postériori, que la variable $\delta U_{\delta H}$ est essentiellement une fonction des variables $\varphi = \omega t + n_k^* \phi_k + \varphi_0$ et J , ou λ et J_k :

$$\delta U_{\delta H}(J, \varphi, t) = G(J_k, \lambda, \varphi, t)$$

$$\underline{\delta U}_{\delta H}(J, \varphi, t) = \underline{G}(J_k, \lambda, \varphi, t)$$

les fonctions G et $\underline{G}$ variant lentement avec t et régulières à quelque distance de la surface de résonance $\lambda = 0$; ces fonctions présentent une forte variation au voisinage de cette surface dans un domaine d'épaisseur $\lambda_c \ll \lambda_p$, l'échelle λ_c est au moins égale à l'extension λ_T du domaine piégé ($\lambda_T = |2a/\alpha|^{1/2}$) qui a été prise petite par rapport à λ_p . Tenant compte de l'introduction des fonctions G et $\underline{G}$, nous avons :

$$\frac{\partial \delta U_{\delta H}(J, \phi, t)}{\partial t} = \omega \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$n_k^* \frac{\partial \delta U_{\delta H}(J, \varphi, t)}{\partial J_k} = \frac{\partial G}{\partial \lambda}$$

et la fonctionnelle $\mathcal{E}_{NL}(\underline{\delta U}) + \mathcal{E}_{\delta H}(\underline{\delta U})$ s'écrit à son tour :

$$\mathcal{E}_{NL}(\underline{\delta U}) + \mathcal{E}_{\delta H}(\underline{\delta U}) = \int \cdots \left\{ \frac{f}{T} \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{f}{T} \frac{\partial a}{\partial t} \cos\varphi + \frac{f}{T} \frac{\partial G}{\partial \lambda} a \sin\varphi + \frac{f}{T} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \Omega \right.$$

$$\left. + \frac{f}{T} \left(\omega + n_k^* \frac{\partial U}{\partial J_k}\right) a \sin\varphi \right\} \underline{G}\, d_3 J\, d_3 \phi \frac{d\omega t}{2\pi} - \frac{1}{2} \int \cdots \mathcal{D}(\underline{G})\, \underline{G}\, d_3 J\, d_3 \phi \frac{d\omega t}{2\pi} \qquad \text{(A.17)}$$

avec

$$-\frac{1}{2} \int \cdots \mathcal{D}(\underline{G})\, \underline{G}\, d_3 J\, d_3 \phi \frac{d\omega t}{2\pi} = \frac{1}{4T} \int \cdots \left\{ \langle \delta\lambda^2 \rangle \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2 + 2 \langle \delta\lambda\, \delta J_k \rangle \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial J_k}\right) \right.$$

$$\left. + \langle \delta\varphi^2 \rangle \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)^2 \right\} f\, d_3 J\, d_3 \phi \frac{d\omega t}{2\pi}$$

une fois la valeur de G obtenue par l'extrémalisation de (A.17), la fonctionnelle $\delta \dot{\mathcal{U}}_1(\underline{U})$ sera donnée par :

$$\delta \dot{\mathcal{U}}_1(\underline{U}) = -\frac{2}{T^2} \int \cdots f_\alpha \left(n_k^* \frac{\partial U_\alpha}{\partial J_k}\right) a \cos\varphi \frac{\partial G}{\partial \varphi}\, d_3 J\, d_3 \phi \frac{d\omega t}{2\pi} \qquad \text{(A.18)}$$

Calculons alors la valeur de G en extrémalisant la fonctionnelle $\mathcal{C}_{NL} + \mathcal{C}_{\delta H}$ par rapport à $\underline{G}$ en ignorant la condition (A.8) pour $\underline{G}$ ou G. Dans la masse de l'assemblée des particules, c'est-à-dire pour $|\lambda| > \lambda'_c$ où λ'_c $(\ll \lambda_p)$ est nettement supérieur à λ_c, les effets de piégeage sont négligeables et nous pouvons négliger les termes non linéaires proportionnels à $s\,\partial G/\partial\lambda$ dans (A.17). Les termes collisionnels sont proportionnels à la fréquence τ_c^{-1} définie par (29) et les termes en $\partial/\partial t$ sont proportionnels à $\gamma = (\partial s/s\,\partial t)$; tous ces termes peuvent être considérés comme des perturbations par rapport au terme proportionnel à $\Omega = \alpha\lambda$, ceci étant dû aux conditions (32) dans lesquelles nous nous plaçons. La fonction G se développe alors dans le domaine $|\lambda| > \lambda'_c$ au premier ordre :

$$G(\lambda, J_R, \varphi, t) = G_0(\lambda, J_R, t) + \frac{\omega + m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}}{\Omega} \cos\varphi$$
$$+ \gamma\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{\omega + m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}}{\Omega^2}\right) s\sin\varphi + \sum_{\varepsilon=\pm 1} \left(\mathfrak{D}(G)\right)_{\varepsilon m^*, \varepsilon} \frac{\varepsilon}{\Omega} \frac{T}{f} \exp i\varepsilon\varphi \qquad (A.19)$$

avec $\mathfrak{D}(G) = \sum_{m,\nu} \left(\mathfrak{D}(G)\right)_{m,\nu} \exp i\,(m_R \phi_R + \nu\omega t)$, et G_0 étant une fonction arbitraire de λ et J_R, régulière et variant lentement dans le temps. La valeur (A.18) de $\delta \dot{M}_2(\underline{U})$ correspondant au domaine $|\lambda| > \lambda'_c$ est alors :

$$\left\{\delta \dot{M}_2(\underline{U})\right\}_{|\lambda|>\lambda'_c} = \frac{2}{T}\gamma \iiint_{|\lambda|>\lambda'_c} \left[m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}\, m_R^* \frac{\partial f}{\partial J_R} \frac{1}{\Omega^2} \frac{s^2}{2}\right] (2\pi)^3 d_3 J$$
$$- \frac{2}{T} \int\!\!\cdots\!\!\int_{|\lambda|>\lambda'_c} \frac{m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}}{\Omega} s\cos\varphi\, \mathfrak{D}\left(G_0 + \frac{\omega + m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}}{\Omega} s\cos\varphi\right) d_3 J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} \qquad (A.20)$$

Cette fonctionnelle contient des termes divergents en $1/\lambda'_c$, $1/\lambda'^3_c$, cependant ils sont annulés par des termes similaires dans l'expression de $\delta \dot{M}_2(\underline{U})$ valable dans le domaine $|\lambda| < \lambda'_c$ et seront donc ignorés dans la suite. D'autre part nous verrons plus loin que la fonction $G_0(\lambda, J_R, t)$ vérifie l'inégalité :

$$\left|G_0(\lambda, J_R, t) + \frac{s^2}{4T}\right| \leq G(|\lambda|<\lambda'_c, J_R, t) \qquad (A.21)$$

Le terme proportionnel à G_0 prend alors la forme :

$$- \frac{2}{T} \int\!\!\cdots\!\!\int_{|\lambda|>\lambda'_c} \left(m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}\right) \frac{s\cos\varphi}{\Omega}\, \mathfrak{D}\left(\frac{s^2}{4T}\right) d_3 J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi} + Y$$

où

$$\gamma \lesssim n_R \frac{\partial U}{\partial J_R} \frac{\delta}{\Omega_p} \frac{1}{\tau_c} \mathcal{O}\left(G(|\lambda| < \lambda'_c)\right)$$

une quantité qui apparaîtra dans la suite toujours négligeable par rapport à $\left\{ \delta \dot{d}b_2 (\underline{U}) \right\}_{|\lambda| < \lambda'_c}$. Dans ces conditions et tenant compte de (A.12) et (7), les fonctionnelles $\left\{ \delta \dot{d}b_2 (\underline{U}) \right\}_{|\lambda| > \lambda'_c}$ et $\delta \dot{d}b_2$ respectivement données par (A.20) et (A.16) combinées avec la quantité $\iiint \underline{W}_{\ldots}(J,t)\,(\delta^2/4\pi^2)\,(2\pi)^3\, d_3 J$ qui figure aussi dans l'expression (A.14) de $\delta \dot{d}b$ peuvent être réarrangés pour former les fonctionnelles $\delta \dot{d}b_b$ et $\delta \dot{d}b_{\gamma_b}$ données par (37) et (38).

Dans le domaine $|\lambda| < \lambda'_c$ au voisinage de la surface de résonance nous devons garder le terme proportionnel à $\delta\, \partial G / \partial \lambda$ dans la fonctionnelle $\mathcal{C}_{NL} + \mathcal{C}_{\delta H}$ (A.17) ; dans cette fonctionnelle le terme $\partial G / \partial t$ est proportionnel à :

$$\frac{\partial G}{\partial t} \underline{G} \lambda_c \sim \gamma G \underline{G} \lambda_c$$

le facteur $(\partial G / \partial \lambda)^2$ dans le terme collisionnel est quant à lui proportionnel à :

$$\frac{\langle \delta\lambda^2 \rangle}{\lambda_c} \underline{G}^2 \lambda_c \sim \frac{\langle \delta\Omega^2 \rangle}{\Omega_p^2} \cdot \underline{G}^2 \frac{\lambda_p^2}{\lambda_c^2}$$

à cause de la forte variation de $\underline{G}$ sur l'intervalle λ_c ; les autres termes collisionnels sont proportionnels à :

$$\frac{\langle \delta\lambda\, \delta J_R \rangle}{\Delta J_R} \underline{G}^2 \,,\quad \langle \delta\lambda\, \delta\varphi \rangle \underline{G}^2 \,,$$

$$\frac{\langle \delta J_R^2 \rangle}{(\Delta J_R)^2} \underline{G}^2 \lambda'_c \,,\quad \langle \delta\varphi^2 \rangle \underline{G}^2 \lambda'_c \,,$$

$$\lesssim \left(\frac{\langle \delta\Omega^2 \rangle}{\Omega_p^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\tau_c} \right)^{1/2} \underline{G}^2 \lambda_p \,,\ \underline{G}^2 \frac{\lambda'_c}{\tau_c}$$

où nous avons utilisé des inégalités de la forme :

$$\langle \delta\lambda\, \delta J_R \rangle \lesssim \left(\langle \delta\lambda^2 \rangle \right)^{1/2} \left(\langle \delta J_R^2 \rangle \right)^{1/2}, \ldots$$

Tous ces termes peuvent être négligés si nous avons :

$$\gamma \gg \left(\frac{\langle \delta\Omega^2 \rangle}{\Omega_p^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\tau_c} \right)^{1/2} \frac{\lambda_p}{\lambda_c} \,,\ \frac{1}{\tau_c}$$

ou bien :

$$\frac{\langle \delta\Omega^2 \rangle}{\Omega_p^2} \frac{\lambda_p^2}{\lambda_c^2} \gg \frac{1}{\tau_c}$$

Ceci est vérifié, pour les valeurs de λ_c obtenues ci-dessous dans divers cas, si les conditions (30) et (31) sont satisfaites. Dans ces conditions nous introduisons la fonction $q(\lambda, \varphi, t)$:

$$G(\lambda, \varphi, t) = \left(\omega + m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}\right) q(\lambda, \varphi, t)$$

et pour chaque valeur de J_R nous obtenons l'équation d'Euler résultant de l'extrémalisation de $\mathcal{E}_{NL} + \mathcal{E}_{SH}$ par rapport à $\underline{G}$ sous la forme d'une équation linéaire en q :

$$-\frac{\langle \delta\Omega^2 \rangle}{2\alpha^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \lambda} s \sin\varphi + \alpha\lambda \frac{\partial q}{\partial \varphi} + s \sin\varphi = 0 \qquad \text{(A.22)}$$

où le coefficient de diffusion $\langle \delta\Omega^2 \rangle$ peut être considéré comme constant. L'équation (A.22) contient en principe un autre terme proportionnel à $\partial s / \partial t$; en fait celui-ci induit une valeur de q symmétrique dans le plan λ , φ et ne contribue pas à la valeur de $\{\delta \dot{m}_2(\underline{u})\}_{|\lambda| < \lambda'_c}$.
Pour chaque valeur de J_R , l'équation (A.22) accompagnée de la condition aux limites pour $\lambda = \pm \lambda'_c$:

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = -\frac{s \sin\varphi}{\Omega}$$

imposé par (A.19) et accompagnée éventuellement de conditions initiales pour $t = -\infty$, détermine la dérivée $\partial q / \partial \varphi$ dans l'intervalle $|\lambda| < \lambda'_c$ et la différence des valeurs prises par q à $\lambda = \pm \lambda'_c$. Cette différence détermine la différence pour $\lambda = \pm \lambda'_c$ des valeurs de la fonction $G_0(\lambda, J_R, t)$ qui figure dans (A.19). La condition de contrainte (25) équivalente à :

$$\int_{|\lambda|>\lambda'_c} F(J_R + m^*\lambda)\, \vartheta(J_R + m^*\lambda) \left[G_0(\lambda, J_R, t) + \frac{\Delta L}{4\pi} \right] d\lambda =$$

$$-\int_{-\lambda'_c}^{+\lambda'_c} d\lambda \int_0^{2\pi} F(J_R + m^*\lambda)\, \vartheta(J_R + m^*\lambda)\, G(\lambda, J_R, t)\, \frac{d\varphi}{2\pi}$$

détermine alors G_0 pour $|\lambda| > \lambda'_c$ comme une fonction régulière satisfaisant (A.19). Enfin la valeur (A.20) de $\{\delta \dot{m}_2\}_{|\lambda| < \lambda'_c}$ sur l'intervalle $|\lambda| < \lambda'_c$ peut alors s'écrire :

$$\left[\delta \dot{\mathcal{U}}_c\right]_{|\lambda|<\lambda_c'} = -\frac{1}{T^2}\iiint f\, 2m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}\left(\omega + m_R^* \frac{\partial U}{\partial J_R}\right)\frac{|\alpha|}{2\pi}\, s$$

$$\left(\int_{-\lambda_c'}^{+\lambda_c'} \frac{d\lambda}{(\lambda_c' \gg \lambda_c)} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\partial g(\lambda,\varphi,t)}{\partial \varphi} \cos\varphi\right)_{J=J_R} \delta(\Omega)(2\pi)^3 d_3 J \qquad (A.23)$$

C'est cette fonctionnelle qui s'identifie à $\delta \dot{\mathcal{U}}_R$ (33) et dont nous pouvons maintenant calculer explicitement la valeur en résolvant l'équation (A.22) donnant g dans les divers cas possibles.

Le cas a) considéré page 32 correspond à la situation de Landau (avec $\gamma = 0$) où les effets de piégeage ne sont pas importants. L'équation (A.22) se simplifie en négligeant le terme $s \sin\varphi\, \partial g/\partial\lambda$. Nous obtenons alors :

$$g = -\frac{s}{\alpha\lambda_c}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^3}{6}\right)\sin\left(\varphi - \tau\frac{\lambda}{\lambda_c}\right) d\tau$$

où $\lambda_c = \langle \delta\Omega^2\rangle^{1/3}/\alpha$ est l'échelle de variation de g au voisinage de la surface de résonance et est inférieur à λ_p d'après (32). Il suffit alors de remplacer $\partial g/\partial\varphi$ par sa valeur dans (A.23) pour obtenir l'expression de la fonctionnelle $\delta \dot{\mathcal{U}}_R$ (34) avec $\mathcal{I}(s,J) = (\pi/2)\, s^2(J)$.

Le cas b) considéré page 33 correspond à la situation où les effets de piégeage sont importants (avec $\gamma = 0$), l'assemblée de particule établit un équilibre collisionnel au voisinage de la surface de résonance. Une valeur de g valable au premier ordre en $\langle \delta\Omega^2\rangle$ peut être obtenue par la procédure de Zakharov et Karpman [11] , ce qui donne :

$$g = K - \lambda \qquad \text{si } -\alpha/\omega < 1$$

$$g = K + \frac{\lambda}{|\lambda|}\int_1^\omega \frac{\pi\lambda_T}{2}\frac{d\omega}{\int_0^\pi (\omega - \cos\varphi')^{1/2} d\varphi'} - \lambda \qquad \text{si } \omega > 1$$

où K est une constante et

$$\omega = 2\frac{\lambda^2}{\lambda_T^2} + \cos\varphi \qquad , \quad \lambda_T = 2|s/\alpha|^{1/2}$$

Dans ce cas $\lambda_c = \lambda_T \ll \lambda_p$. L'intégrale $\iint (\partial g/\partial\varphi)\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi$ dans (A.23) peut alors être calculée au premier ordre en $\langle \delta\Omega^2\rangle$ en multipliant l'équation (A.22) par g et intégrant sur λ , φ ; on obtient ainsi :

$$\Delta \iint \frac{dq}{\partial \lambda} \cos\varphi \, d\lambda \, d\varphi = \Delta \iint q \sin\varphi \, d\lambda d\varphi = - \frac{\langle \delta\Omega^2 \rangle}{2\alpha^2} \iint \left(\frac{\partial q}{\partial \lambda} \right)^2 d\lambda \, d\varphi$$

ce qui, remplacé dans la fonctionnelle $\delta \dot{\mathcal{U}}_1$, entraîne l'expression de la fonctionnelle $\delta \dot{\mathcal{U}}_R$ (34) avec $I(\Delta, J) = 1{,}38 \, \frac{|\Delta(J,t)|^{1/2}}{\alpha^{3/2}} \langle \delta\Omega^2 \rangle$.

Pour des perturbations d'amplitude Δ dépendant du temps il y a aussi deux cas possibles, le cas a) de la page 35 où la variation dans le temps $\partial q / \partial t$ joue un rôle dominant dans l'équation (A.22), on a alors

$$q = \frac{\Delta}{2} \left[\frac{\exp i\varphi}{\alpha\lambda - i\gamma} + \frac{\exp -i\varphi}{\alpha\lambda + i\gamma} \right]$$

avec $\lambda_c = \gamma / \alpha$ plus petit que λ_p par la condition $\gamma \ll \Omega_p$. Cette valeur de q reportée dans $\delta \dot{\mathcal{U}}_1$ fournit la fonction $I(\Delta, J, t)$ de la forme (35).

Dans le cas b) de la page 35 le terme collisionnel $\langle \delta\Omega^2 \rangle \partial^2 q / \partial \lambda^2$ dans (A.22) est négligeable dans la majeure partie du domaine piégé et dans le domaine extérieur. A l'ordre zéro en γ , la différence $q + \lambda$ est une fonction de l'invariant adiabatique :

$$w(\lambda, \varphi, t) = \lambda_T \oint (w - \cos\varphi')^{1/2} d\varphi'$$

dépendant du temps à travers la dépendance en temps de $\lambda_T = 2 \, |\Delta(J,t)/\alpha|^{1/2}$.
Les conditions aux limites pour $|\lambda| = \lambda'_c \gg \lambda_c$ et la condition initiale $q = 0$ pour $t = -\infty$ impose en fait :

$$q = -\lambda \qquad \text{pour} \quad -1 < w < 1$$

$$q = -\lambda + \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{\lambda_T}{\pi 2^{3/2}} \int_0^{2\pi} (w - \cos\varphi') \, d\varphi' \qquad \text{pour} \quad w > 1$$

tandis que l'échelle générale λ_c est égale à λ_T dans ce cas.
La fonction q exhibe aussi une brusque variation au voisinage de la séparatrice $w = 1$, cette variation est déterminée par le terme collisionnel de (A.22) mais ce calcul n'est pas nécessaire pour obtenir l'intégrale $\iint (\partial q / \partial \varphi) \cos\varphi \, d\lambda \, d\varphi$, car sa valeur peut être tirée de (A.22) au premier ordre en γ sous la forme :

$$s\iint \frac{\partial q}{\partial \varphi}\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi = -\left[\iint_{w>1} q\,\frac{\partial q}{\partial t}\, d\lambda\, d\varphi + \iint_{w<1} q\,\frac{\partial q}{\partial t}\, d\lambda\, d\varphi\right]$$

$$= -\iint_{w>1} q\,\frac{\partial q}{\partial t}\, d\lambda\, d\varphi$$

c'est ce résultat qui, reporté dans l'expression de $\{\delta \dot{w}_2\}_{|\lambda|<\lambda'_c}$ aboutit à la valeur (39) de la fonction $I(s, J, t)$.

Le champ self consistant (50) (51) peut être déterminé en extrémalisant la fonctionnelle (10) qui, au second ordre en $\delta\vec{A}$, $\delta\Psi$, prend la forme de la fonctionnelle des champs $\underline{\vec{A}}$, $\underline{\Psi}$ et $\underline{\vec{A}}_+$, $\underline{\Psi}_+$ voisins des champs $\vec{A}$, Ψ et $\vec{A}_+$, Ψ_+ :

$$\mathcal{N}\left(\underline{\vec{A}}, \underline{\Psi}, \underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+\right) = -\sum_\alpha \int\!\!\ldots \mathcal{F}_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t)\,(\underline{H} + \underline{\delta H})\, d_3x\, d_3p\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\iiint (|\vec{\nabla}\underline{\Psi}|^2 - |\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}}|^2)\, d_3x + \left(\mathcal{H}_{em}(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) + c.c.\right) - \mathcal{H}_{em}(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega)$$

où $\underline{H}$ et $\mathcal{H}_{em}$ sont donnés par (52) et (55) et

$$\underline{\delta H} = \left[\left(-\frac{e_\alpha}{m_\alpha c}\left(\vec{p} - \frac{e_\alpha}{c}\vec{A}\right)\underline{\vec{A}}_+ + e_\alpha \underline{\Psi}_+\right) \exp i\omega t + c.c.\right] \exp \gamma t + \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha c^2}\,|\vec{A}_+|^2 \exp 2\gamma t$$

Pour chaque assemblée, les variables d'action $\underline{J}$ de l'Hamiltonien $\underline{H}$ se déduisent des variables d'action J de l'Hamiltonien H par une équation du type (A.4). Nous avons donc :

$$\underline{H} = h\left(J, \underline{\vec{A}}, \underline{\Psi}\right) + k(J, \varphi)$$

où

$$k(J, \varphi) = \sum_{m \neq (0,0,0)} k_m(J) \exp i\, m_\beta \phi_\beta$$

est de l'ordre des variations $\underline{\vec{A}} - \vec{A}$, $\underline{\Psi} - \Psi$. Utilisant alors la définition de la fonction régularisée $f_\alpha(J, t)$ (14) et l'équation (56) il vient

$$\mathcal{N}\left(\underline{\vec{A}}, \underline{\Psi}, \underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+\right) = \mathcal{N}\left(\underline{\vec{A}}, \underline{\Psi}\right) - \sum_\alpha \int\!\!\ldots \mathcal{F}_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t)\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha c^2}\,|\vec{A}_+|^2\, d_3x\, d_3p$$

$$+ \mathcal{H}_{em}\left(\underline{\vec{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega\right) - \sum_\alpha \int\!\!\ldots f_\alpha(J, t)\,\frac{\delta U - \delta H}{T}\,\underline{\delta H}\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

$$- \sum_\alpha \int\!\!\ldots k(J, \varphi)\,\frac{\delta U - \delta H}{T}\, F(J)\, d_3J\, d_3\phi\, \frac{d\omega t}{2\pi}$$

où $\mathcal{N}(\vec{\underline{A}}, \underline{\Psi})$ est donnée par (49). La variable δU est essentiellement la somme des réponses $\delta U_{\delta H}$ calculées précédemment pour chaque composante δH de la forme (23). Il apparaît donc que, au premier ordre en $\delta\vec{A}$, $\delta\Psi$, la fonctionnelle $\mathcal{N}(\vec{\underline{A}}, \underline{\Psi}, \vec{\underline{A}}_+, \underline{\Psi}_+)$ se réduit à $\mathcal{N}(\vec{\underline{A}}, \underline{\Psi})$. Au second ordre en $\delta\vec{A}$, $\delta\Psi$:

$$\mathcal{N}(\vec{A}, \Psi, \vec{\underline{A}}_+, \underline{\Psi}_+) = \mathcal{N}(\vec{A}, \Psi) + \Big\{ \big(\mathcal{Z}_{em}(\vec{\underline{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) + c.c. \big) - \mathcal{Z}_{em}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega)$$
$$+ \sum_\alpha \big(\mathcal{Z}_\alpha(\vec{\underline{A}}_+, \underline{\Psi}_+) + c.c. - \mathcal{Z}_\alpha(\vec{A}_+, \Psi_+) \big) + \sum_\alpha \big(\mathcal{Z}'_\alpha(\vec{\underline{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) + c.c. \big)$$
$$+ \sum_\alpha \big(i\, \mathcal{Z}''_\alpha(\vec{\underline{A}}_+, \underline{\Psi}_+, \omega) + c.c. \big) \Big\} \exp 2\gamma t$$

Le champ $\vec{A}_+$, Ψ_+ est alors spécifié par le principe $d\big(\mathcal{Z}_{em} + \sum_\alpha (\mathcal{Z}_\alpha + \mathcal{Z}'_\alpha + i\,\mathcal{Z}''_\alpha)\big) = d\mathcal{Z} = 0$ (équation 53). L'énergie du plasma et du champ électromagnétique contenu dans ses frontières se tire de (11) sous la forme :

$$\mathcal{E}_+ = -\mathcal{N}(\vec{A}, \Psi, \vec{A}_+, \Psi_+) + \omega \, \frac{\partial \mathcal{Z}_{em}(\vec{A}_+, \Psi_+, \omega)}{\partial \omega}$$

c'est-à-dire de la forme (59).

ANNEXE III - PRINCIPE VARIATIONNEL SIMPLIFIE EN PRESENCE DE DEUX PERTURBATIONS RESONANTES DANS LE MEME DOMAINE

Soit une situation initiale caractérisée par l'Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p}, t) = h(J)$ admettant le système de variables angulaire et d'action (J_k, Φ_k) et par la fonction de distribution de particules $f(J) = A \exp -\left(\frac{h(J) \cdot U(J)}{T}\right)$. (Par souci de simplicité nous n'envisagerons dans cette démonstration qu'une seule assemblée de particules). Une première perturbation $\delta H = s(J) \cos m_k^* \Phi_k$ est ajoutée à l'Hamiltonien de base $h(J)$. Cette perturbation crée un domaine piégé dans les conditions de Zakharov et Karpman (Annexe II). Par souci de simplicité encore nous choisirons le système de variables angulaires et d'action (J_k, Φ_k) de façon que le triplet m_k^* se réduise à $m_k^* = (0, m_2^*, 0)$. Ceci est toujours possible en prenant $|m_2^*|$ égal au PGCD des trois entiers m_1^*, m_2^*, m_3^* initiaux.

La perturbation δH crée une discontinuité de la topologie des trajectoires au voisinage de la surface de résonance. Si nous voulons examiner de plus près le voisinage de cette surface, il nous faut, dans ce domaine, définir un nouveau système de variables angulaires et d'action J'_k, Φ'_k continues dans ce domaine. Ce système peut être défini en reprenant les équations du mouvement :

$$J_r = \text{Cste} \quad (r = 1,3) \quad , \quad \frac{dJ_2}{dt} = s\, m_2^* \sin(m_2^* \Phi_2) \tag{A.24}$$

$$\frac{d\Phi_r}{dt} = \frac{\partial h}{\partial J_r} + \frac{\partial s}{\partial J_r} \cos m_2^* \Phi_2$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\partial h}{\partial J_2} + \frac{\partial s}{\partial J_2} \cos m_2^* \Phi_2$$

Nous développons l'équation donnant $d\Phi_2 / dt$ dans le domaine piégé pour J_1 et J_3 fixé, au voisinage de $\Phi_2 = 0$ et de la surface de résonance $J_2 = J_2^*(J_1, J_3)$ définie par $m_2^* \left(\frac{\partial h(J_1, J_2, J_3)}{\partial J_2} \right)_{J_2^*} = 0$:

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2} \right)_{J_2^*} (J_2 - J_2^*) + \left(\frac{\partial s}{\partial J_2} \right)_{J_2^*} \tag{A.25}$$

Appelons λ l'amplitude maximale en J_2 pour les mouvements que nous envisageons autour de la surface de résonance, nous pouvons poser :

$$J_2 - \left(J_2^* - \left(\frac{\partial s}{\partial J_2}\right)\Big/\left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)_{J_2^*}\right) = \lambda \cos \omega_b t$$
$$\phi_2 = \tilde{\phi}_2 \sin \omega_b t \qquad (A.26)$$

$\tilde{\phi}_2$ et ω_b seront données par les équations du mouvement (A.24) (A.25) :

$$\omega_b^2 = -s\, m_2^{*2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)_{J_2^*} \qquad \tilde{\phi}_2 = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)_{J_2^*} \frac{\lambda}{\omega_b} \qquad (A.27)$$

Les variables J_R , ϕ_R apparaissent comme des fonctions quasi périodiques du temps. Il résulte de (A.3) que les nouvelles variables angulaires et d'action (ϕ'_R, J'_R) en présence de δH et la variable $\lambda(J')$ au voisinage de la surface de résonance sont alors données de façon implicite par :

$$J_2 - J_2^* + \left(\frac{\partial s}{\partial J_2}\right)^* \Big/ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)^* = \lambda(J') \cos \phi'_2$$
$$J'_r = J_r \quad (r = 1,3)$$
$$J'_2 = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)^* \frac{\lambda^2}{\omega_b} \qquad (A.28)$$
$$\omega_b^2(J_1, J_3) = \omega_b^2(J'_1, J'_3) = -s^* m_2^{*2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)^*$$

et
$$\phi_r = \phi'_r + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_r \partial J_2}\right)^* \frac{\lambda(J')}{\omega_b} \sin \phi'_2$$
$$\phi_2 = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)^* \frac{\lambda(J')}{\omega_b} \sin \phi'_2$$

où nous convenons que $\mathcal{V}(J_1, J_2^*, J_3) = \mathcal{V}^*(J_1, J_3)$. L'Hamiltonien $H + \delta H$ est donné par :

$$H + \delta H = h'(J') = h^*(J'_1, J'_3) + s^*(J'_1, J'_3) + \omega_b J'_2$$

La frontière du domaine piégé est donnée par $\lambda = \lambda_m$ où

$$\lambda_m = \left| \frac{4s}{(\partial^2 h / \partial J_2^2)^*} \right|^{1/2}$$

Les formules qui précèdent ne sont strictement appliquables que pour $\lambda \lesssim \lambda_m/2$. Les équations du mouvement prennent la forme :

$$\frac{d\phi'_r}{dt} = \frac{\partial h'(J')}{\partial J'_r} = \frac{\partial h}{\partial J_r} - \frac{\partial^2 h}{\partial J_r^2} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_r \partial J_2}\right)\left(\frac{\partial \delta / \partial J_2}{\partial^2 h / \partial J_2^2}\right) + \frac{\partial \delta}{\partial J_r}$$

$$\frac{d\phi'_2}{dt} = \frac{\partial h}{\partial J'_2} = \omega_b$$

$$J'_k = \omega_k t \quad (k = 1,2,3)$$

Dans le domaine piégé, la fonction de distribution des particules $f'(J')$ est de la forme :

$$f'(J') = A \exp - \frac{h'(J') - U'(J')}{T}$$

$$U'(J') = U(J_1, J_2^*, J_3) = U^*(J_1, J_3) = U^*(J'_1, J'_3)$$

Une valeur d'essai $\underline{U}'(J')$ de $U'(J')$ est alors donnée par :

$$\underline{U}'(J') = \underline{U}^*(J'_1, J'_3)$$

La variable $U'(J')$ est indépendante de J'_2 car, dans le domaine piégé, la fonction de distribution subit l'effet "Plateau" (cf. Figure 2 dans le cas $\gamma = 0$) reflètant l'équilibre collisionnel de l'assemblée au voisinage de la surface de résonance.

Nous ajoutons alors à l'Hamiltonien $h(J) + \delta H$ une perturbation $\delta H'$ de la forme :

$$\delta H' = A(J) \exp i(\omega' t + m_k^{*\prime} \phi_k) + c.c.$$

qui peut s'écrire dans le système J', ϕ' :

$$\delta H' = A^*(J') \exp i\omega' t \sum_p J_p \left(m_k^{\prime *} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_k \partial J_2}\right)^* \frac{\lambda}{\omega_b}\right) \exp i(m_r^{\prime *} \phi'_r + p\phi'_2) + c.c.$$

$$\delta H' = \sum_p \delta H'_p(J') \exp(i m_r^{\prime *} \phi'_r + i p \phi'_2) \exp i\omega' t \qquad (A.29)$$

et dans le système J' , ϕ' associé à l'Hamiltonien $h(J) + \delta H$, la perturbation $\delta H'$ crée un domaine piégé dans les conditions de l'Annexe II, nous pouvons alors mettre la fonction de distribution des particules dans ce domaine sous la forme :

$$\mathcal{F}'(J', \phi', t) = f'(J') \exp - \frac{\delta H' - \delta U'(J', \phi')}{T}$$

$$\delta U' = \sum_p \delta U'_p(J') \exp i(m'^*_r \phi'_r + p\phi'_2) \exp i\omega' t + c.c.$$

La production d'entropie $\delta \dot{\mathcal{U}}$ est alors obtenue par analogie avec l'équation (A.15) de l'Annexe II :

$$\delta \dot{\mathcal{U}}(\underline{U}') = \frac{2}{T^2} \int \cdots \frac{\partial \underline{U}'}{\partial J'_k} f \left(\frac{\partial \delta H}{\partial \phi'_k} \right) \delta U' d_3 J' d_3 \phi' \frac{d\omega' t}{2\pi} \qquad \text{(A.30)}$$

Pour poursuivre le calcul il faut avoir l'expression de $\delta U'(J', \phi')$. En l'absence de collisions l'équation de Vlasov :

$$\frac{d\mathcal{F}'}{dt} = \frac{f'(J')}{T} \left[i(\omega' + m'^*_r \frac{\partial h'}{\partial J'_r} + p \frac{\partial h'}{\partial J'_2}) \delta U'_p - i(\omega' + m'^*_r \frac{\partial U'}{\partial J'_r}) \delta H'_p \right] \exp i(m'^*_r \phi'_r + p\phi'_2 + \omega t) + c.c. = 0$$

donne :

$$\delta U' = \sum_p \frac{\omega' + m'^*_r \frac{\partial U'}{\partial J'_r} + p \frac{\partial U'}{\partial J'_2}}{\omega' + m'^*_r \frac{\partial h'}{\partial J'_r} + p \frac{\partial h'}{\partial J'_2}} \delta H'_p \exp i(m'^*_r \phi'_r + p\phi'_2 + \omega' t) + c.c. \qquad \text{(A.31)}$$

Supposant que la fréquence ω_b est très supérieure à ω', $m'^*_r (\partial h'/\partial J'_r) = m'^*_r (\partial (h^* + \delta^*)/\partial J_r)$, nous n'aurons de production d'entropie qu'à cause du terme $p = 0$, au voisinage de la surface :

$$\omega' + m'^*_r \frac{\partial h'}{\partial J'_r} = \omega' + m'^*_1 \left(\frac{\partial (h^* + \delta^*)}{\partial J_1} \right) + m'^*_3 \left(\frac{\partial (h^* + \delta^*)}{\partial J_3} \right) = 0$$

A l'extérieur du domaine piégé, un système de variables angulaires et d'action ϕ'_k , J'_k se déduisant par continuité du système ϕ_k , J_k peut être utilisé. Il apparaît alors que $\delta U'$, donnée de nouveau par l'équation de Vlasov est très inférieure à la valeur de $\delta U'$ dans le domaine piégé. Cette circonstance permet de calculer la valeur de $\delta U'$ dans le domaine piégé, compte tenu de l'effet des collisions ; à cet effet nous posons :

$$\delta U' = g(J') \exp i(m'^*_r \phi'_r + i\omega' t) + c.c.$$

où la fonction $g(J')$ s'annule au bord du domaine piégé. La fonction g peut être déterminée par le principe variationnel général (2) : la fonctionnelle

$$\frac{2}{T}\int\dots\frac{d\mathcal{F}'}{dt}\left(\underline{g}\,\exp(i m_r'^{*}\phi_r' + i\omega' t) + c.c.\right) d_3J\, d_3\phi'\,\frac{d\omega' t}{2\pi} \quad + \dot{S}(\underline{g})$$

doit être extrémum pour $\underline{g}(J')$ au voisinage de $\underline{g}$. Utilisant la valeur de $d\mathcal{F}'/dt$ donnée plus haut, et admettant naturellement que la valeur de $\dot{S}(\underline{g})$ est due à la variation rapide de $\underline{g}$ dans le domaine piégé - une hypothèse cohérente avec les hypothèses générales du paragraphe A.III - nous devons rendre extrémum, pour $J_1 = J_1'$, et $J_3 = J_3'$ fixées :

$$\int\left\{4\left[i(\omega' + m_r'^{*}\frac{\partial h'}{\partial J_r'})\,g\underline{g}^{*} - i(\omega' + m_r'^{*}\frac{\partial U'}{\partial J_r'})\,\delta H'_{000}\,\underline{g}^{*}\right] + \frac{1}{2}\langle\delta J_2'^{2}\rangle_{000}\left(\frac{\partial \delta U'}{\partial J_2'}\right)^{2}\right\} dJ_2' \qquad (A.32)$$

où $\langle\delta J_2'^{2}\rangle_{000}$ est la valeur moyenne du coefficient de diffusion $\langle\delta J_2'^{2}\rangle$ défini par :

$$\langle\delta J_2'^{2}\rangle = \sum_{m'}\langle\delta J_2'^{2}\rangle_{m'}\exp i\, m_k'\phi_k'$$

Il résulte de (A.28) que :

$$\langle\delta J_2'^{2}\rangle_{000} = \left(\left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)^{2}\frac{2\lambda}{\omega_b}\right)^{2}\langle\delta\lambda^{2}\rangle_{000}$$

$$\langle\delta\lambda^{2}\rangle_{000} = \frac{1}{2}\langle\delta J_2^{2}\rangle$$

Pour $\frac{1}{2}\, m_k^{*'}\left(\partial^2 h/\partial J_k\partial J_2\right)^{*}\lambda_m/\omega_b = \left(m_k'^{*}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_k\partial J_2}\right)^{*}/m_2^{*}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2}\right)\right) = X > 1$, la variable $\delta H'_{000}(J')$ donnée par :

$$\delta H'_{000}(J') = A^{*}(J')\,J_0\left(m_k'^{*}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_k\partial J_\rho}\right)^{*}\frac{\lambda}{\omega_b}\right) = A^{*}(J').J_0\left(\frac{2X\lambda}{\lambda_m}\right)$$

oscille rapidement dans le domaine piégé et s'annule pour $\lambda \sim \lambda_m$, c'est-à-dire à la frontière. On trouve alors par la minimisation de (A.32) :

$$g = \frac{\omega' + m_r'^{*}\dfrac{\partial U'}{\partial J_r'}}{\omega' + m_r'^{*}\dfrac{\partial h'}{\partial J_r'} - i\gamma_E}\;A^{*}(J')\,J_0\left(\frac{2X\lambda}{\lambda_m}\right)$$

où

$$\gamma_E = \frac{1}{4}\langle\delta J_2^{2}\rangle\left(m_k'^{*}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_k\partial J_2}\right)^{*}\frac{1}{\omega_b}\right)^{2}$$

$$\gamma_E = \frac{1}{4}\langle\delta J_2^{2}\rangle\, X^{2}\,\frac{\left(m_2'^{*}\left(\partial^2 h/\partial J_2^{2}\right)^{*}\right)^{2}}{\omega_b^{2}}$$

Une formule analogue s'applique dans le cas opposé $(x < 1)$ en remplaçant dans la fonction de Bessel J_0 et dans l'expression de γ_E la valeur de X par l'unité.

Remplaçant alors $\delta U'$ par sa valeur dans $\delta \dot{\mathcal{M}}(\underline{U}')$ (A.30) et mettant en évidence l'intégration en dJ_2' multipliée par n_2^*, nombre d'ilots primaires dus à δH, nous obtenons une formule de $\delta \dot{\mathcal{M}}(\underline{U}')$ qui ensuite mise sous forme covariante fournit l'expression (42).

ANNEXE IV - PUBLICATION ET COMMUNICATIONS

PUBLICATION :

G. REQUIN, A. SAMAIN

"Simplified variationnal principle to study the evolution of a plasma"

Révisé et soumis pour publication dans Annals of Physics (N.Y.).

COMMUNICATIONS :

R. DEI CAS, G. REQUIN and A. SAMAIN

"Radiofrequency divertor for Tokamak"

in Journal of Nuclear Materials 76 & 77 (1978) 542.

(Proc. 3^{d} Inter. Conf. on Plasma Surface Interactions in Controlled Fusion Devices - Abingdon - Oxfordshire, U.K., 1978).

G. REQUIN, A. SAMAIN

"Plasma purification in Tokamaks by centrifugal effects"

in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1980

(Proc. 8th Intern. Conf., Brussels, 1980)
Vol , IAEA, Vienna (1981) paper IAEA-CN-38/Y.2-1

G. REQUIN, B. GAGEY, J.P. GIRARD and A. SAMAIN

"New calculation of Ion Conduction due to magnetic ripple in Large Tokamak"

Proc. 2nd Joint Grenoble-Varenna Intern. Symposium on Heating in Toroidal Plasmas - Como (Italy). 1980 - C(55)
Commission of the European Communities (Brussels) : EUR-FU-BRU XII/894/80/CON.

DRFC-SCP EUR-CEA-FC-1031 (REVISE)

SIMPLIFIED VARIATIONNAL PRINCIPLE TO STUDY THE EVOLUTION OF A PLASMA

G. REQUIN A. SAMAIN

March 1980

Soumis pour publication à : Annals of Physics

SIMPLIFIED VARIATIONAL PRINCIPLE TO STUDY THE EVOLUTION OF A PLASMA

G.REQUIN and A.SAMAIN

ABSTRACT

A minimum entropy production principle allowing to calculate the evolution of a plasma in low collisionality regimes is developped. The particles basically follow integrable trajectories specified by three constants of motion J_1, J_2, J_3, to which a resonant perturbation δH is applied. The proposed variational principle allows to calculate the evolution of the distribution of particles in space J_1, J_2, J_3 by using only regular variables in this space. It contains the entropy production near the resonant surfaces associated with δH for the Landau and Zakharov and Karpman situations, and for a new regime where particles behave adiabatically in the trapped domains created by δH. It contains also the entropy production associated with friction forces in the bulk of phase space. The method is applied to neoclassical transport phenomena in Tokamaks where this latter type of entropy production plays a major role, namely, the viscosity and the diffusion of impurities. The strong influence on that diffusion of a small electrostatic field along the magnetic surfaces is also considered.

I. INTRODUCTION

— An important class of problems in Plasma Physics is to calculate the slow evolution of a plasma when the latter does not behave as a fluid or a system of fluid assemblies, that is to say when the trajectories of the individual particles play an important role. Such problems systematically arise in magnetically confined plasmas at high temperatures and then concern the associated transport phenomena, heating processes and even stability (considered as the evolution of a perturbation). Therefore they have been considered and solved in many cases. The goal of the present work is to synthetize the methods which have been used by a relatively simple statement valid for a broad class of situations.

— The starting point is to exploit as far as possible the integrability of the trajectories, if not for the exact Hamiltonian $\mathcal{H}(x,p,t)$ associated with the self consistent field, at least for a neighbouring Hamiltonian $H(x,p,t)$ depending slowly on time. For that Hamiltonian the trajectories generate ergodically three dimensional tori in phase space x, p . Each of these tori is specified by the values of three action variables [1] ,[2] depending slowly on time

$$J_1(x,p,t) \ , \ J_2(x,p,t) \ , \ J_3(x,p,t)$$

The Hamiltonian $H(x,p,t)$ is a function of the variables J_1, J_2, J_3

$$H(x,p,t) = h(J,t) \ , \ J = (J_1, J_2, J_3)$$

— If H does not depend explicitly on time and corresponds to the actual self consistent field, the variables J are true constants of motion. (The variables J_k do not depend explicitly on time in that case). In the absence of collisions, the Vlasov equation then implies that the distribution function of particles of a given assembly is a static function of the variables J . Actually the evolution can only be due to a dependance on time of H , or to a finite rate of collisions, or to the fact that the real Hamiltonian $\mathcal{H}$ differs from H by a pertubation $\delta H(x,p,t)$, which , in general,

considerably complicates the particle motion. However, if these effects are not too strong, the particle distribution function $\mathcal{F}(x, p, t)$ is not very far from being a function of J and t. We have $\mathcal{F} \# f_{ex}(J, t)$, where $(2\pi)^3 f_{ex}(J, t)$ is the distribution function of the considered assembly in J space at time t

$$(2\pi)^3 f_{ex}(J,t) = \frac{1}{d_3 J} \int_{J \in d_3 J} \mathcal{F}(x, p, t)\, d_3 x\, d_3 p$$

However, this exact distribution $f_{ex}(J, t)$ may have a complicated structure in space J because of the resonances experienced by the particles. On the other hand the perturbation δH may have the quasi periodic form

$$\delta H(x, p, t) = \delta H(x, p, t, \omega_1 t, \omega_2 t, \dots)$$

varying slowly with t and 2π periodic in $\omega_1 t, \omega_2 t, \dots$, the dependance of δH in $\omega_1 t$, ... corresponding to faster oscillations. Then the variable $f_{ex}(J, t)$ has a similar structure in t. It is convenient to introduce a simplified distribution $f(J, t)$, regular in J with characteristic scales of variation ΔJ_k in the direction J_k, and depending slowly on t. This variable $f(J, t)$ may be specified by the condition that, for variables $U(J, t)$ similarily regular in J, t, we have

$$\int \dots \mathcal{F}(x, p, t)\, U(J, t)\, d_3 x\, d_3 p\, dt = \iiint\!\!\int f(J, t)\, U(J, t)\, (2\pi)^3 d_3 J\, dt \quad (1)$$

Obviously the domain $\Delta J_1 \times \Delta J_2 \times \Delta J_3$ in space J must be smaller than the domain occupied by the assembly. The variable $f(J, t)$ then generally contains the useful informations concerning this assembly.

— Our problem is to build up a convenient method for calculating the evolution in time of $f(J, t)$. Such a method is provided by putting the Fokker Planck equation in a variational form, [3], [4], [5], which exploits the symmetry properties of the Collision operator. Under standard conditions, this variational principle and the Hamiltonian stucture of the particle motion allow to build functional $\dot{S}(\underline{u}(J, t))$ and $\delta \dot{M}(\underline{u}(J, t))$ of the regular variable $\underline{u}(J, t)$ such that the functional

$$\dot{M}(\underline{u}(J,t)) = \frac{2}{\Theta}\iiint \frac{\partial f(J,t)}{\partial t}\,\underline{u}(J,t)\,(2\pi)^3\,d_3J + \dot{S}(\underline{u}(J,t)) + \delta\dot{M}(\underline{u}(J,t)) \qquad (2)$$

is an extremum for all the variations of $\underline{u}(J,t)$ near the variable $u(J,t)$ specified by

$$f(J,t) = A\exp\left(-\frac{h(J,t) - u(J,t)}{\Theta}\right) \qquad (3)$$

where A and Θ are proper constants . The variable $u(J,t)$ is a measure of the deviation from thermodynamical equilibrium of the considered assembly. The functional $\dot{S}(\underline{u})$ (defined in section II) is the rate of entropy production in the plasma when this deviation is exactly specified by $\underline{u}(J,t)$. The functional $\delta\dot{M}(\underline{u})$ is a correction due to the perturbation δH which must be superimposed to $H = h(J,t)$ to restore the real Hamiltonian $\mathcal{H}$ governing the particle motion . As long as an expression for $\delta\dot{M}(\underline{u})$ is available, the extremum principle(2) gives a procedure to calculate $\partial f(J,t)/\partial t$ which is relatively simple, involving only regular test functions of the three variables J .

— Standard values of the entropy production $\delta\dot{M}(\underline{u})$ due to δH are given in section IV. In general $\delta\dot{M}(\underline{u})$ contains a resonant term produced in the neighbouring of resonant surfaces in J space . Depending on the collision rate, the growth rates of the resonant components of δH and the extension of the trapped domains near the resonant surfaces, this term may retain the quasilinear [6][7] or the Zakharov and Karpman [8] structure, or a new structure co responding to an adiabatic evolution inside the trapped domains. Under our working hypothesis, they are generally dominant, but important situations occur where it is not the case. We accordingly give the residual value of $\delta\dot{M}(\underline{u})$ applicable to those situations.

— The structure of the paper is as follows: The basic variational principle equivalent to the Fokker Planck equation is recalled

in section II and applied to the case of an integrable Hamiltonian in section III. Our basic statements, namely the expression of $\delta \dot{M}(\underline{u})$ is given in section IV and proved in section V. Applications are finally given in section VI to illustrate our synthesis.

II. GENERAL VARIATIONAL PRINCIPLE EQUIVALENT TO THE FOKKER PLANCK EQUATIONS

—It is convenient after several authors [3], [4], [5] to express the Fokker Planck equation giving the evolution in time of the distribution function $\mathcal{F}(x, p, t, \alpha)$ of a particle assembly α in a variational form. A simple way is to write

$$\mathcal{F}(x, p, t, \alpha) = A_\alpha \exp\left(-\frac{\mathcal{H}(x, p, t, \alpha) - \mathcal{U}(x, p, t, \alpha)}{\Theta}\right) \quad (4)$$

where A_α and Θ are constants, $\mathcal{H}$ is the real Hamiltonian experienced by the particles and $\mathcal{U}$ reflects the deviation from thermodynamical equilibrium. The set of the Fokker Planck equations is then equivalent to state that the functional of the variables $\underline{\mathcal{U}}(x, p, t, \alpha)$

$$\dot{\mathcal{M}}(\underline{\mathcal{U}}) = \sum_\alpha \frac{2}{\Theta} \int \cdots \frac{d\mathcal{F}}{dt}\, \underline{\mathcal{U}}\, d_3x\, d_3p + \dot{S}(\mathcal{U}) \quad (5)$$

is an extremum for all variations of the variable $\underline{\mathcal{U}}$ near $\mathcal{U}$. In Eq. (5), $d\mathcal{F}/dt$ is the variation along the trajectories

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_r}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_r}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_r}$$

and the functional $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ is defined by

$$\dot{S}(\underline{\mathcal{U}}) = \frac{1}{2\Theta^2} \sum_{\alpha,\alpha'} \int \dots X_{rs}(x,p,p',\alpha,\alpha',t) \cdot \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{U}}(x,p,t,\alpha)}{\partial p_r} - \frac{\partial \underline{\mathcal{U}}(x,p',t,\alpha')}{\partial p'_r}\right) \cdot \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{U}}(x,p,t,\alpha)}{\partial p_s} - \frac{\partial \underline{\mathcal{U}}(x,p',t,\alpha')}{\partial p'_s}\right) \cdot \mathcal{F}(x,p,t,\alpha)\ \mathcal{F}(x,p',t,\alpha')\ d_3x\, d_3p\, d_3p' \tag{6}$$

where [9], [10].

$$X_{rs}(x,p,p',\alpha,\alpha',t) = 2\pi e_\alpha^2 e_{\alpha'}^2 \operatorname{Log}\Lambda \ \frac{w^2\delta_{rs} - w_r w_s}{w^3},$$

w is the relative velocity of particles (x,p,α), (x,p',α')

$$w_r = \frac{\partial \mathcal{H}(x,p,t,\alpha)}{\partial p_r} - \frac{\partial \mathcal{H}(x,p',t,\alpha')}{\partial p'_r},$$

$\operatorname{Log}\Lambda$ is the Coulomb Logarithm and e_α ($e_{\alpha'}$) is the charge of the particle α (α'). The quantities X_{rs} are related to the diffusion coefficients $\langle \delta p_r\, \delta p_s \rangle$ in p space for the particles of assembly α by

$$\langle \delta p_r\, \delta p_s \rangle = 2 \sum_{\alpha'} \iint X_{rs}(x,p,p',\alpha,\alpha')\, \mathcal{F}(x,p,t,\alpha')\, d_3p' \tag{7}$$

The value $\dot{S}(\mathcal{U})$ of $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ for $\underline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ is the entropy production in the plasma. Being $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ a quadradic form in $\underline{\mathcal{U}}$, it is convenient to introduce the linear symmetric operator $\mathcal{Q}$ acting on the variable $\underline{\mathcal{U}}(x,p,t,\alpha)$ such that

$$\dot{S}(\underline{\mathcal{U}}) = -\frac{1}{\Theta} \sum_\alpha \int \dots \mathcal{Q}(\underline{\mathcal{U}}) \cdot \underline{\mathcal{U}}\ d_3x\, d_3p \tag{8a}$$

and

$$\sum_\alpha \int \dots \mathcal{Q}(\underline{\mathcal{U}}) \cdot \underline{\mathcal{U}}'\ d_3x\, d_3p = \sum_\alpha \int \dots \underline{\mathcal{U}}\, \mathcal{Q}(\underline{\mathcal{U}}')\ d_3x\, d_3p \tag{8b}$$

From the variational principle (5) we have

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{D}(\mathcal{U}) \qquad (8c)$$

i.e., $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ is the standard R.H.S. $(d\mathcal{F}/dt)_{coll.}$ of the Fokker Planck equation. The functional $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ and the

— The functional $\dot{S}$ and the operator $\mathcal{D}$ depend in principle on $\mathcal{F}$ and $\mathcal{H}$. An important point is that in an evolution problem the distribution function $\mathcal{F}$ may be replaced by an approximate value. This is due to the fact that $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ is for any $\mathcal{F}$ always ≥ 0, vanishing only if $\underline{\mathcal{U}}$ has the form : $\underline{\mathcal{U}}(x, p, t, \alpha) = A_r(x)\, p_r + B(x)\, \mathcal{H}(x, p, t, \alpha) + C(x, \alpha)$ and that if one replaces $\mathcal{F}$ by $\mathcal{F} + \delta\mathcal{F}$ with $\delta\mathcal{F}/\mathcal{F} \ll 1$ the quantity $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ is obtained with a small relative error of the order of $\delta\mathcal{F}/\mathcal{F}$. Therefore the principle (5) may be safely applied in practice even if $\mathcal{F}$ in (6) is known with a small relative error. (The case is different if $\mathcal{H}$ is replaced by $\mathcal{H} + \delta\mathcal{H}$. Even if $\delta\mathcal{H}/\mathcal{H} \ll 1$, the relative error on $\dot{S}(\underline{\mathcal{U}})$ may be large). In what follows, we will assume that for each assembly $\mathcal{F}$ is replaced in the expression (6) by a regular approximation, for instance by the maxwellian $A \exp(-\mathcal{H}/\Theta)$ if the plasma is not far from thermodynamical equilibrium, or by the regularized distribution function $f(J, t)$ in J space specified by (1), if the deviation from thermodynamical equilibrium is large.

III. CASE OF INTEGRABLE TRAJECTORIES

— Let us first use this general principle when the particles experience a static Hamiltonian $H(x, p)$ generating integrable trajectories

$$\begin{aligned} x_r &= x_r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ p_r &= p_r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ \phi_k &= \omega_k t + \beta_k \end{aligned} \qquad (9)$$

where the functions x_n and p_n are 2π periodic with respect to the ϕ_k, the quantities α_k and β_k are constant and the angular frequencies ω_k are functions of the α_k. This is the case for instance, at a very high degree of approximation, in standard static toroidal of mirror configurations for small Larmor radii [11]. The trajectories are drawn on three dimensional tori in phase space (x, p), obtained from (9) by fixing $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ and varying ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 by 2π. In fact, the equations (9) imply the existence for the Hamiltonian H of canonically conjugate angular and action variables $\phi_k(x, p)$, $J_k(x, p)$ [1], [2].

The basic variables x, p when expressed as functions of $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ and $J = (J_1, J_2, J_3)$ are 2π periodic with respect to the angular variables ϕ, and the Hamiltonian H is a function of the action variables J only: $H = h(J)$. The Hamiltonian equations

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \frac{\partial h(J)}{\partial J_k}, \quad \frac{dJ_k}{dt} = 0 \qquad (10)$$

then imply that the J_k are constants of motion and the ϕ_k vary linearly with time, with angular frequencies $\partial h(J)/\partial J_k$, consistent with the quasi periodic structure (9) of the trajectories. In fact the variables ϕ_k may be identified to the variables Φ_k defined as dynamical variables by the system (9), together with the variables J_k. The action variables J_k are functions of the variables α_k and may be used to specify the tori generated by the trajectories. Being given such a torus, they may be calculated by the relation

$$2\pi \nu_k J_k = \oint p\, dx \qquad (11)$$

ν_1, ν_2, ν_3 integers

where the integral is performed along any closed line on the torus along which ϕ_k varies by $2\pi\nu_k$. The use of the system ϕ_k, J_k is natural and greatly simplifies the analysis. Let us note that the angular and action variables for a static Hamiltonian $\mathcal{H}(x, p)$, as they result from (9) are not necessarily continuous. Possibly, the phase space is divided

in several regions where the equations (9) are valid and variables ϕ_k , J_k exist, but the topology of the trajectories is radically different from a region to another, and the corresponding variables $\phi_k(x,p)$, $J_k(x,p)$ are discontinuous across the separatrix . As long as the division of phase space results in a large region and a small "trapped" domain, it is possible , and it may be useful, to turn to a new Hamiltonian $H(x,p)$ for which a continuous system of angular and action variables exists , the real Hamiltonian $\mathcal{H}$ then differing from H by a perturbation δH responsible for the trapped domain. This will be done in the section VI for the Tokamak case. Generally we assume in what follows that the variables ϕ_k, J_k associated with H are continuous in the useful phase space.

— In absence of collisions the Vlasov equation implies that the equilibrium distribution function for the considered species is a function $f(J)$ of the variables J . As $D(\phi, J) / D(x, p) = 1$ and the phase space (x, p) is the product of the J space and a cell of extension $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ of the ϕ space, the particle density in J space is $(2\pi)^3 f(J)$ .If collisions are present , at a small level, the distribution function $\mathcal{F}(x, p)$ for a given species is still nearly a function of the variable J . We may write

$$\mathcal{F} = f(J, t) + \delta\mathcal{F}$$
$$\delta\mathcal{F} = \sum_{n \neq (0,0,0)} \delta\mathcal{F}_n(J, t) \exp(i n_k \phi_k) \qquad (12)$$

n_1, n_2, n_3 integers, $n = (n_1, n_2, n_3)$

where again $(2\pi)^3 f(J, t)$ is the distribution function in J space at time t and $\delta\mathcal{F}$ is a small quantity proportional to the collision rate ν_c . At first order in ν_c , the deviation from thermodynamical equilbrium defined by (4) is given by

$$\mathcal{U} = u(J, t) + \delta\mathcal{U} \qquad (13)$$

where $u(J,t)$ is given by (3) and $\delta u = \Theta\, \delta \mathcal{F}/f$ is proportional to ν_c. The variational principle(5) may be applied with test deviations $\underline{\mathcal{U}}$ of a similar form: $\underline{\mathcal{U}} = \underline{u}(J,t) + \underline{\delta u}, \underline{\delta u} = O(\nu_c)$. As the functional $\dot{M}(\underline{\mathcal{U}})$ is an extremum for $\underline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$, we obtain in fact an expression of $\dot{M}(\underline{\mathcal{U}})$ valid at order 1 in ν_c by replacing $\underline{\mathcal{U}}$ by $\underline{u}(J,t)$. On the other hand it results from (12) and the law of motion (10) that

$$\int \dots \frac{d\mathcal{F}}{dt}\, \underline{u}(J,t)\, d_3 J\, d_3 \phi = \iiint \frac{\partial f(J,t)}{\partial t}\, \underline{u}(J,t)\, (2\pi)^3\, d_3 J$$

so that at order 1 in ν_c the evolution of the distribution function $f(J,t)$ may be calculated by expressing that the functional of the variable $\underline{u}$

$$\dot{M}(\underline{u}) = \frac{2}{\Theta} \iiint \frac{\partial f(J,t)}{\partial t}\, \underline{u}(J,t)\, (2\pi)^3\, d_3 J + \dot{S}(\underline{u}(J,t)) \qquad (14)$$

is an extremum for $\underline{u}(J,t) = u(J,t)$.

— This principle is also valid when the Hamiltonian governing the particles depends slowly on time, $H = H(x,p,t)$, if angular and action variables $\phi_k(x,p,t)$, $J_k(x,p,t)$ exist "at each time",i.e. for each Hamiltonian $H(x,p,t)$ assumed to be frozen at time t. We then have $H(x,p,t) = h(J,t)$. The variables ϕ_k, J_k depend explicitely on time in that case, but the action variables J verify

$$\frac{d J_k}{dt} = \frac{\partial J_k(x,p,t)}{\partial t} = \sum_{n \neq (0,0,0)} K_n(J,t)\, \exp(i n_k \phi_k)$$

where $K_n(J,t)$ is a regular variable proportional to $\partial H(x,p,t)/\partial t$. Writing $\mathcal{F}$ and $\mathcal{U}$ in the form (12), (13), respectively, δu contains a further term proportional to $\partial H/\partial t$.

At first order in ν_c and $\partial H/\partial t$, we may again calculate $\dot{M}(\underline{u})$ as $\dot{M}(\underline{u}(J,t))$, which again reduces to the expression (14) of $\dot{M}(\underline{u})$, because the quantity

$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{dJ}{dt}\ \underline{u}(J,t)\ d_3x\, d_3p = \int\!\!\int\!\!\int \frac{df(J,t)}{dt}\ \underline{u}(J,t)\ d_3\phi\, d_3J$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{\partial f(J,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(J,t)}{\partial J_k}\ \frac{dJ_k}{dt}\right) d_3\phi\, d_3J$$

reduces again to $\iiint \partial f(J,t)/\partial t\ \ \underline{u}(J,t)\ (2\pi)^3\, d_3J$. because of (15).

— Of course the principle (14) is no longer valid at order 2 in ν_c or $\partial H/\partial t$. At this order a further term $Z(\underline{u})$ must be added to the expression (14) of $\dot{M}(\underline{u})$. However our main interest is not this correction but rather the correction $\delta\dot{M}(\underline{u})$ which is due to a perturbation δH superimposed to the Hamiltonian H producing integrable trajectories. Accordingly we assume that

$$|Z(u)| \ll |\delta\dot{M}(u)| \qquad (16)$$

It is easily shown that $|Z(u)|$ may be estimated as

$$|Z(u)| = \pi \sum_{n\neq(000)} \iiint \left(|W_n|^2 / F + \frac{1}{\odot^2} \left| \dot{H}_n \Big/ n_k \frac{\partial h(J,t)}{\partial J_k} \right|^2 \left(n_k \frac{\partial u(J,t)}{\partial J_k} \right)^2 F \right) \delta\left(n_k \frac{\partial h J,t}{\partial J_k}\right) (2\pi)^3\, d_3J$$

where the variables $W_n(J,t)$ and $\dot{H}_n(J,t)$ are specified by the Fourier expansions

$$\mathcal{D}(u(J,t)) = \sum_n W_n(J,t) \exp(i n_k \phi_k)$$
$$\frac{\partial H(x,p,t)}{\partial t} = \sum_n \dot{H}_n(J,t) \exp(i n_k \phi_k)$$

and $\mathcal{D}$ is the linear operator specified by (8). Note that the variables $\dot{H}_n / (n_k \partial h / \partial J_k)$ must remain finite on the resonant surfaces $n_k \partial h / \partial J_k = 0$ if the Hamiltonian $H(x,p,t)$ produces integrable trajectories at each time.

IV. PERTURBING THE INTEGRABLE HAMILTONIAN

— We will now state the main result (to be shown in the next section) of our paper, namely the expression of the function $\delta \dot{M}(\underline{u})$ due to a perturbation δH superimposed to the integrable Hamiltonian H. We mainly consider the simplest perturbation, namely

$$\delta H = \Delta(J,t) \cos\varphi + \sigma(J,t)$$
$$\varphi = n_k^* \phi_k + \omega t + \varphi_0 \ , \quad \gamma = \partial \Delta(J,t) / \Delta \partial t \qquad (17)$$

where $n^* = (n_1^*, n_2^*, n_3^*)$ is a given triplet of integers, ω is a real frequency, φ_0 is a constant, $\Delta(J,t)$ is a regular function of the variables J and $\sigma = O(\Delta^2)$. In view of the unperturbed laws of motion (10), the perturbation δH is resonant on the surface of phase space where

$$\Omega(J,t) \equiv n_k \frac{\partial h(J,t)}{\partial J_k} + \omega = 0$$

which is also a surface in J space. It produces in the neighbouring of this surface a trapped domain where the trajectories have not the same topology as in the bulk of phase space : the phase $n_k^* \phi_k + \omega t$ along a trajectory in this

domain varies within a finite interval $< 2\pi$ rather than being ergodically distributed. For small δH, the projection of the trapped domain in J space is given by

$$|\Omega(J,t)| \leq 2\,|\alpha\,\delta|^{1/2} = \Omega_t \qquad (18)$$

where

$$\alpha(J,t) = n_k^* \frac{\partial \Omega(J,t)}{\partial J_k} = n_k^*\, n_l^* \frac{\partial^2 h(J,t)}{\partial J_k\, \partial J_l}$$

— As explained in section I, the distribution function $\mathcal{F}(x,p,t)$ is now more complex because of the resonance effects and the ωt dependance of δH. We therefore introduce the regularized distribution function in J space $f(J,t)$ specified by (1).

a / Hypothesis

— Besides the condition (16), a basic assumption to obtain standard values of $\delta \dot{M}(\underline{U})$ is that the phase φ followed along Hamiltonian trajectories takes ergodically all possible values, before that phase has significantly diffused by collisional

effects and before the particle has diffused in space J in a cell $\Delta J_1 \times \Delta J_2 \times \Delta J_3$. Far from the resonance surface the phase $\varphi = n_k^* \phi_k \pm \omega t$ is ergodized after a time of the order of Ω_b^{-1}, where Ω_b is the bulk value of Ω

$$\Omega_b = \left| \frac{\partial \Omega(J,t)}{\partial J_k} \Delta J_k \right| \qquad (19)$$

The above condition may then be written $\Omega_b \gg \nu_c$ where

$$\nu_c = \mathrm{Sup} \left(\frac{\langle \delta J_k \, \delta J_l \rangle}{\Delta J_k \, \Delta J_l} , \langle (\delta n_k^* \phi_k)^2 \rangle \right) \qquad (20)$$

being $\langle \delta J_k \, \delta J_l \rangle$ and $\langle (\delta n_k^* \phi_k)^2 \rangle$ the diffusion coefficients for the variables J_k and φ, respectively. Near the resonance surface, ergodisation of φ cannot be strictly due to the Hamiltonian motion. A transverse diffusion of the particle in J space is first necessary for the particle to escape from the trapped domain. This takes the time γ_t^{-1}, where

$$\gamma_t \simeq \frac{\langle (\delta \Omega)^2 \rangle}{\Omega_t^2} \simeq \frac{\langle (\delta \Omega)^2 \rangle}{\alpha \, s}$$

and $\langle (\delta \Omega)^2 \rangle = \partial \Omega / \partial J_k \cdot \partial \Omega / \partial J_l \cdot \langle \delta J_k \, \delta J_l \rangle$ is the diffusion coefficient for the variable $\Omega(J,t)$.
Even so, ergodization of φ near the resonance surface requires again transverse diffusion allowing the particles to reach growing Ω regions. In fact it needs a further time interval γ_L^{-1}, where

$$\gamma_L \simeq \langle (\delta \Omega)^2 \rangle^{1/3}$$

is the usual Landau resonance width. We therefore assume that near the resonance surface

$$\gamma_T \gg \nu_c \qquad (21\,a)$$

$$\gamma_L \gg \nu_c \qquad (21\,b)$$

As $\nu_c \gtrsim \langle(\delta\Omega)^2\rangle / \Omega_b^2$, these conditions actually imply that $\Omega_b \gg \nu_c$. In fact they imply that

$$\Omega_t \ll \Omega_b \quad , \quad \nu_c \ll \gamma_L \ll \Omega_b$$

i.e., that the trapped domain and the Landau resonance domain are small compared to the domain $\Delta J_1 \times \Delta J_2 \times \Delta J_3$. We also assume that the growth rate $\gamma = \partial \Delta(J,t) / \Delta \partial t$ of the perturbation δH verifies

$$|\gamma| \ll \Omega_b \qquad (21\,c)$$

Note that the conditions (21) impose as well the minimum extension of the domain $\Delta J_1 \times \Delta J_2 \times \Delta J_3$ which may be used and therefore the maximum accuracy by which $F(J,t)$ may fit the assembly distribution in J space. To simplify the calculations we still assume that the diffusion coefficient $\langle(\delta\Omega)^2\rangle$ does not appreciably vary in phase space over each torus J_k constant, namely

$$\langle(\delta\Omega)^2\rangle = \sum_n \Delta_n(J,t) \exp(i n_k \phi_k) \# \Delta_{0,0,0}(J,t) \qquad (22)$$

b /Constant amplitude perturbation

— Under the foregoing conditions, we then find that $\delta\dot{M}(\underline{u})$ is the sum of a "resonant" term due to the direct resonance effect of δH and a "friction" term due to the combined effect of δH and the friction forces experienced by the particles

$$\delta\dot{M}(\underline{u}) = \delta\dot{M}_R(\underline{u}) + \delta\dot{M}_F(\underline{u}) \qquad (23)$$

The resonant term $\delta \dot{M}_R(\underline{u})$ may be written in the form

$$\delta \dot{M}_R(\underline{u}) = \frac{1}{\odot^2} \iiint \left(n_k^* \frac{\partial \underline{u}(J,t)}{\partial J_k} + \omega \right)^2 I(\Delta, J, t)\, \delta(\Omega)\, f (2\pi)^3 d_3 J \qquad (24)$$

where δ stands for the Dirac function. The function $I(\Delta, J, t)$ has the Landau structure

$$I(\Delta, J, t) = \frac{\pi}{2} \left(\Delta(J, t) \right)^2 \qquad (25)$$

if $\gamma_t \gg \Omega_t \iff \gamma_L \gg \Omega_t$

i.e., if the trapping effect is destroyed by collisions. In the opposite case, the function $I(\Delta, J, t)$ has the Zakharov and Karpmann structure

$$I(\Delta, J, t) = 1.38 \frac{|\Delta(J,t)|^{1/2}}{|\alpha|^{3/2}} \langle (\delta\Omega)^2 \rangle \qquad (26)$$

if $\gamma_t \ll \Omega_t$

— The resonant term $\delta \dot{M}_R(\underline{u})$ is generally dominant, except if there are few resonant particles or for test deviations from thermodynamical equilibrium $\underline{u}(J, t)$ with components such that

$$n_k^* \frac{\partial \underline{u}(J,t)}{\partial J_k} + \omega = 0$$

on the resonant surface. In those situations the friction term $\delta \dot{M}_F(\underline{u})$ must be retained. We have

$$\delta \dot{M}_A(\underline{u}) = \dot{S}\left(\underline{u} + \sigma - \frac{\Delta^2}{4\Theta} + \frac{1}{2}\sum_{\pm} \Delta \frac{n_k \partial \underline{u}(J,t)/\partial J_k + \omega}{\Omega \mp i\varepsilon} \exp(\pm i\varphi)\right) - \dot{S}(\underline{u}) \qquad (27)$$

The quantity ε is assumed to vanish by positive values. Near the resonance surface $\Omega = 0$, the integration in space p involved by (27) and (6) then produces diverging terms proportional to ε^{-3} and ε^{-1}. Actually these terms are reevaluated when one calculates $\delta \dot{M}_R(\underline{u})$, and they must be discarded in (27). The integration involved by (27) and (6) near the resonance surface produces also a residue independant of ε, which reflects the particle resonance under the effect of the friction forces. In the Landau case (25) this residue must be retained. In the Zakharov and Karpman case (26) however, the entropy production due to the frictional resonance is weakened by the trapping effect (in the ratio of the functions $I(\Delta, J, t)$ given by (25) and (26).) In that case the residue must be also be discarded. If the frequency ω is not zero, the functional $\dot{S}(\underline{u})$ and $\delta \dot{M}_F(\underline{u})$ must be averaged over ωt.

c / Perturbation amplitude varying in time

— In the case of a finite growth rate $\gamma = \partial \Delta(J,t)/\Delta \partial t$ of the perturbation δH, a further term reflecting the adiabatic evolution of the particles outside the resonant domain, given by

$$\delta \dot{M}_A(\underline{u}) = -\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{\Theta} \mathcal{P}\mathcal{P} \iiint n_k^* \frac{\partial f(\beta,t)}{\partial J_k} \, n_k^* \frac{\partial \underline{u}(J,t)}{\partial J_k} \, \frac{1}{\Omega} \cdot \Delta \frac{\partial \Delta(J,t)}{\partial t} \, f \, (2\pi)^3 \, d_3 J\right) \qquad (28)$$

must be first added to $\delta \dot{M}(\underline{u})$. On the other hand, the resonant term $\delta \dot{M}_R(\underline{u})$ is possibly changed. Actually the Landau value (24) (25) is always applicable if

$$\gamma_t \gg \Omega_t \quad \text{or} \quad \gamma \gg \Omega_t$$

The Zakharov and Karpman value (26) is valid only if

$$|\gamma| \ll \gamma_t \ll \Omega_t$$

If

$$\gamma_t \ll \gamma \ll \Omega_t$$

a new regime appears, where the particles behave adiabatically inside the trapped domain, except in a layer near the separatrix. The correction $\delta \dot{M}_R(\underline{u})$ is then given by (24) with

$$I(\Delta, J, t) = 0,85\ \gamma \frac{|\Delta|^{3/2}}{|\alpha|^{1/2}} \qquad (29)$$

d / Simple Generalizations

— If δH is a sum of terms of the form (17), the functional $\delta \dot{M}(\underline{u})$ is obtained by adding the elementary terms given above in the Landau cases ($\gamma_t \gg \Omega_t$ or $\gamma \gg \Omega_t$), where the assembly response to δH near resonance may be linearized. If trapping effects play a role ($\gamma_t \ll \Omega_t$ and $|\gamma| \ll \Omega_t$), addition of the elementary $\delta \dot{M}(\underline{u})$ is only valid if the trapped domain near each resonance surface is small compared to the distance between these surfaces. While of the greatest interest, the cases where two or many trapped domain overlap are beyond the scope of this article. If δH has the form

$$\delta H = \Delta(J)\ f(n_k^* \phi_k + \omega t + \varphi_0)$$

where the function $f(\varphi)$ is 2π periodic and has a maximum value equal to 1, the function $I(\Delta, J, t)$ in the Zakharov and Karpman case is given by

$$I(\Delta, J, t) = \chi \frac{|\Delta|^{1/2}}{|\alpha|^{3/2}} \langle (\delta\Omega)^2 \rangle$$

where

$$\chi = 2^{3/2}\pi \lim_{w \to \infty} \left(\frac{w}{I(w)} - \int_1^{\infty} \frac{dw}{2\,I(w)} \right)$$

$$I(w) = \int_{-\pi}^{+\pi} (w - f(\varphi))^{-1/2}\, d\varphi$$

Let us note also that if the assembly which is concerned in (2) is labeled by $\alpha = \alpha_0$ say, $\dot{S}(\underline{u})$ stands for $\dot{S}(\underline{u}(J,t), \underline{u}(x,p,t, \alpha \neq \alpha_0))$ and the correction $\delta\dot{M}_F(\underline{u})$ is also to be considered as a functional of $\underline{u}$ and $\underline{u}(\alpha \neq \alpha_0)$. By adding to the functional $\dot{M}(\underline{u})$ at is given by (2)

$$\sum_{\alpha \neq \alpha_0} \int \cdots \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\, \underline{u}\, d_3x\, d_3p$$

it is then also an extremum with respect to $\underline{u}(\alpha \neq \alpha_0)$ near $u(\alpha \neq \alpha_0)$. The expression of $\delta\dot{M}(\underline{u})$ may be immediately generalized if several assemblies verify the conditions (16), (21) and (22) and may therefore be usefully described by a regularized distribution function $F(J,t)$.

V. DEMONSTRATION

a / Preliminary remarks

— The principle (2) results from the general principle (5) where the variable u given by (4) and the test variable $\underline{u} \# u$ (for a given assembly) are replaced by

$$\mathcal{U} = u(J,t) + \delta\mathcal{U}$$
$$\underline{\mathcal{U}} = \underline{u}(J,t) + \underline{\delta\mathcal{U}}$$

Where u is given by (3). We then have

$$\mathcal{F} = f(J,t)\ \exp\left(-\frac{\delta H - \delta\mathcal{U}}{\odot}\right) \qquad (30)$$

The problem is to eliminate the variables $\delta\mathcal{U}$ and $\underline{\delta\mathcal{U}}$ using the normalization condition (1).

— The variable $\delta\mathcal{U}$ will appear as a sum $\delta\mathcal{U}_1 + \delta\mathcal{U}_2$ where $\delta\mathcal{U}_1$ is proportional to δH given by (17) and $\delta\mathcal{U}_2$ to the friction forces (and to the time derivative $\partial H/\partial t$ if the integrable Hamiltonian depends on time). Roughly, the resonant and the frictional entropy production $\delta\dot{M}_R$ and $\delta\dot{M}_F$ in (23) are respectively proportional to $\delta\mathcal{U}_1 \times \delta\mathcal{U}_1$ near the resonant surface for δH and to $\delta\mathcal{U}_1 \times \delta\mathcal{U}_2$ in the bulk of the assembly. The correction Z considered at the end of the section III is proportional to $\delta\mathcal{U}_2 \times \delta\mathcal{U}_2$, again in the bulk of the assembly. The value of $\delta\mathcal{U}_1$ corresponds to a variation $\delta\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} - f$ which is at most equal to that resulting from the formation of a plateau in the trapped domain near the resonant surface for δH. As long as this trapped domain is small compared to the extension of the assembly, as it has been assumed, we then have $\delta\mathcal{F}_1 \ll f$ and $\delta\mathcal{U}_1/\odot \ll 1$. On the other hand, the variable $\delta\mathcal{U}_2$ plays only a role when $\delta\dot{M}_R \leq \delta\dot{M}_F$. The condition (16) : $Z \ll \delta\dot{M} \simeq \delta\dot{M}_R + \delta\dot{M}_F \simeq \delta\dot{M}_F$ then imposes that $\delta\mathcal{U}_2 \leq \delta\mathcal{U}_1$, and generally we may assume that $\delta\mathcal{U}/\odot \ll 1$. Of course the gradient of $\delta\mathcal{U}$ in phase space remain finite in some cases near resonance surfaces. With this restriction, we may however use expansions in $\delta\mathcal{U}/\odot$. Such expansions are valid even if the variable $u/\odot$ is finite, i.e.,

if the plasma is far from thermodynamical equilibrium. This fact, and the remark at the end of the section II , allows to apply the formalism as well in such situations.

(cf ANNEXE II p 159)

VI. APPLICATION TO NEOCLASSICAL TRANSPORT OF IONS IN TOKOMAKS.

— It is well known that the neoclassical effects in closed configurations are due to the modulation δB of the magnetic field B over the magnetic surfaces. It is therefore attracting to calculate these effects by perturbing the assemblies forming the plasma by this modulation. The variational scheme given in Section V allows such an approach for assemblies in the Plateau or Banana regime. We will actually apply this scheme to the calculation of the neoclassical transport of impurities and of the viscosity, where the frictional production of entropy $\delta \dot{M}_F$ that we have introduced plays an important role.

We note that all particles have passing trajectories, namely

nearly follow the flux lines at constant parallel velocity $v_{\parallel}$, if the real Hamiltonian $\mathcal{H}(x, p, t)$ is perturbed by the variable $-\mu\,\delta B(x)$, where μ is the magnetic moment. Accordingly we use as basic Hamiltonian

$$H(x, p, t) = \mathcal{H} - \mu\,\delta B$$

The Hamiltonian H is obviously integrable. The equations (9) , (11) produce a continuous system of angular and action variables ϕ_k , J_k (the usual trapped domain has disappeared), which can be further simplified by assuming that the safety factor q is larger than 1 so that $v_{\parallel}$ and v_{φ} (see Fig.(1) may be safely identified. Being $\psi_T(x)$ and $\psi_p(x)$ the toroidal and the poloidal fluxes embraced by the magnetic surface passing by x (we neglect the inductive electric field) , the action variables J_1, J_2, J_3 are then given at first order in r/R by

$$J_1 = -\frac{mc}{e}\,\mu$$

$$J_2 = \frac{e}{2\pi c}\,J_2' \quad , \quad J_3 = \frac{e}{2\pi c}\,J_3' \qquad (46a)$$

$$J_2' = \psi_T(x) - \frac{2\pi c}{e}\,m\,q\,r\,v_{\parallel}\cos\theta$$

$$J_3' = \psi_p(x) + \frac{2\pi c}{e}\,m\,(R_0 + r\cos\theta)$$

m = particle mass

The associated angular variables ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 are respectively the cyclotronic phase, and, at zeroth order in r/R

$$\phi_2 = \theta \quad , \quad \phi_3 = \varphi \qquad (46b)$$

The action variables J clearly specify the basic constant of motion μ, $V_{\parallel}$ and the magnetic surface where the particle stands. We have in fact $J_2' \# \psi_T$, $J_3' \# \psi_P$, the parallel velocity $V_{\parallel}$ being specified by the difference

$$V_{\parallel}(J_2, J_3) = (R_0 m)^{-1} \frac{e}{2\pi c} \left(J_3' - G(J_2') \right) \qquad (46c)$$

where the function G gives the relation between the toroidal and the poloidal fluxes

$$\psi_P = G(\psi_T) \quad , \quad \frac{1}{q} = - \frac{\partial G(\psi_T)}{\partial \psi_T}$$

At first order in r/R the basic Hamiltonian H is given by

$$H = h(J, t) = \mu B_0 + \frac{1}{2} m V_{\parallel}^2 + e \Psi(J_2', t)$$

where $\Psi(\psi_T, t)$ is the electrostatic potential on the magnetic surface ψ_T . The real Hamiltonian $\mathcal{H}$ is recovered by adding to H the perturbation

$$\delta H = \mu \delta B = - \mu B_0 \frac{r}{R} \cos\theta = - \mu B_0 \frac{r}{R} \cos \phi_2$$

which has the form (17), with $\omega = 0$, $\gamma = 0$,

$$h(J) = - \mu B_0 \frac{r}{R} = - \frac{1}{2} m v_\perp^2 \frac{r}{R} \qquad (47\,a)$$

and the characteristic triplet n^* reduced to

$$(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = (0, 1, 0) \qquad (47\,b)$$

We then have

$$\Omega = n_k^* \frac{\partial h}{\partial J_k} = \frac{\partial h}{\partial J_2} = \frac{v_\parallel}{q R_0} + e \frac{\partial \Psi(J_2', t)}{\partial J_2} \qquad (47\,c)$$

$$\alpha = n_k^* n_l^* \frac{\partial^2 h}{\partial J_k \partial J_l} = \frac{\partial^2 h}{\partial J_2^2} = \frac{1}{q^2 R_0^2 m}$$

It is readily verified that the conditions (16), (21), (22) are satisfied for an ion assembly if the mean free path λ_c is longer than the reconnection length qR (Banana or Plateau regime).

— We use a frame of reference rotating around the major axis where the radial electric field is smell near the magnetic surfaces under study. The assembly not far from

thermodynamical equilibrium near each magnetic surface with density and temperature profiles $n(\psi_\tau, t)$, $T(\psi_\tau, t)$ and a macroscopic angular velocity around the major axis $\Omega_a(\psi_\tau, h, t)$ for particles of energy h, has a distribution function in space, regularized in the sense of (1)

$$F(J, t) = \frac{n(J_2', t)}{(2\pi\, T(J_2', t) m)^{3/2}} \exp\left(-\frac{h - e\Psi(J_2', t)}{T(J_2', t)}\right)$$
$$\left(1 + m R_0 \frac{\Omega_a(J_2', h, t)\ v_{\parallel}}{T(J_2', t)}\right)$$

It then exibits a deviation from thermodynamical equilibrium, given by (3)

$$\frac{u(J, t)}{\odot} = \log\left(n(J_2', t) - \frac{3}{2} \log\left(T(J_2', t) + h\left(\frac{1}{\odot} - \frac{1}{T(J_2', t)}\right)\right.\right.$$
$$+ e\Psi(J_2', t) + \frac{e}{2\pi c} \frac{J_3' - G(J_2')}{T(J_2', t)} \Omega_a(J_2', h, t)$$

To simplify we will choose the constant reference temperature $\odot$ # T on the magnetic surfaces under study. Generally the variable u given by (3) is the perturbation which must be substraeted from the Hamiltonian h for the assembly

specified by $f(J, t)$ to appear in thermodynamical equilibrium Therefore, the derivatives $\partial u / \partial J_2$, $\partial u / \partial J_3$ # Ω_a are the θ averaged angular velocities $d\phi_2/dt = d\theta/dt$, $d\phi_3/dt = d\varphi/dt$ in the θ and φ directions associated with the macroscopic motion of particles with the energy h . A test variable $\underline{u}(J, t)$ neighbouring $u(J, t)$ is specified by test profiles $\underline{n}(\psi_T, t)$, $\underline{T}(\psi_T, t)$ and $\underline{\Omega}_a(\psi_T, h, t)$ neighbouring $n(\psi_T, t)$, $T(\psi_T, t)$ and $\Omega_a(\psi_T, h, t)$

$$\frac{\underline{u}(J, t)}{\Theta} = \operatorname{Log}\left(\underline{n}(J_2', t)\right) - \frac{3}{2} \operatorname{Log} \underline{T}(J_2', t) + h\left(\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\underline{T}(J_2', t)}\right)$$

$$+ e\,\psi(J_2', t) + \frac{e}{2\pi c} \frac{J_3' - G(J_2')}{\underline{T}(J_2', t)} \underline{\Omega}_a(J_2', h, t) \qquad (48a)$$

It is then easily verified that the term proportional to $\partial f / \partial t$ in the functional $\dot{M}(\underline{u})$ given by (2) reduces to

$$\frac{2}{\Theta} \iiint \frac{\partial f}{\partial t} \underline{u}\, (2\pi)^3 d_3 J = 2 \iiint \left(\frac{\partial n(\psi_T, t)}{\partial t} \operatorname{Log} \underline{n} + \frac{3}{2} \frac{\partial T(\psi_T, t)}{\partial t} \operatorname{Log} \underline{T} \right) d_3 x$$

(48b)

If the time dependance of macroscopic angular velocity $\Omega_a(\psi_T, h, t)$ in the φ direction is considered, this expression must be supplemented by a further term, which, for Ω_a independant of h, amounts to

$$2 \iiint \frac{\partial (n(\psi_T,t)\, \Omega_a(\psi_T,t))}{\partial t} \frac{\Omega a}{\underline{I}} \; m \; R_o^2 \; d_3 x \qquad (48c)$$

a/ Neoclassical transport of impurities.

1°/Light ions H and Impurity ions Z in the banana or the Plateau regime.

—In that case the evolution of these two assemblies may be calculated by making the functional

$$\frac{2}{\odot} \sum_{Z,H} \iiint \frac{\partial f}{\partial t} \underline{u} \, (2\pi)^3 d_3 J + \dot{S}(\underline{u}_H, \underline{u}_Z) + \delta \dot{M}(\underline{u}_H, \underline{u}_Z)$$
$$= 2 \sum_{Z,H} \iiint \left(\frac{\partial n(\psi_T,t)}{n \partial t} \operatorname{Log} \underline{n} + \frac{3}{2} \frac{\partial T(\psi_T,t)}{\partial t} \operatorname{Log} \underline{T} \right)$$
$$+ \mathring{S}(\underline{u}_H, \underline{u}_Z) + \delta \dot{M}(\underline{u}_H, \underline{u}_Z) \qquad (49)$$

extremum for $\underline{u}_H$, $\underline{u}_Z$ near u_H, u_Z. For given test profiles $\underline{n}_H$, $\underline{n}_Z$ and $\underline{T}_H$, $\underline{T}_Z$, we obtain the test variables $\underline{\Omega}_{aH}$. and $\underline{\Omega}_{aZ}$ by making extremum the functional $\dot{S} + \delta \dot{M}$. The latter reduces to 0 at zeroth order in δH or r/R. Extremalizing $\dot{S}$ at this order obviously means that, whatever their energy, all

particles H, Z have the same averaged macroscopic angular velocity $\underline{\Omega}_a = \partial \underline{u} / \partial J_3$ in the toroidal direction

$$\underline{\Omega}_{a\,H,Z}(\psi_T, h) = \underline{\Omega}_a(\psi_T)$$

At next order the value of $\dot{S} + \delta \dot{M}$ is the sum of the resonant terms $\delta \dot{M}_R(\underline{u}_H) + \delta \dot{M}_R(\underline{u}_Z)$ given by (24), calculated on the resonant surface $n_k^* \partial h / \partial J_k = \partial h / \partial J_2 = V_{\parallel} / qR = 0$ and depending on the test variables $\underline{u}$ through the derivatives $n_k^* \partial \underline{u} / \partial J_k = \partial \underline{u} / \partial J_2$. This means that, once all particles have the same macroscopic velocity $\underline{\Omega}_a$ in the φ direction, the residual entropy production is mainly due to macroscapic angular velocities $\partial \underline{u} / \partial J_2$ in the θ direction, producing a friction on the θ modulation δB of the magnetic field by resonant Landau or Zakharof-Karpman effects. Using (24)(25) (26) and (47) we obtain for each assembly

$$\delta \dot{M}_R = \int \cdots d_3 x \left(\frac{2\pi c}{e} \left(\frac{\partial \underline{n}}{\underline{n}\, \partial \psi_T} + \left(\frac{V^2}{V_{th}^2} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial \underline{T}}{\underline{T}\, \partial \psi_T} \right) + \frac{\underline{\Omega}_a}{q\, \underline{T}} \right)^2$$
$$I(V_\perp)\ \delta\left(\frac{V_\parallel}{qR} \right)\ n\ \frac{\exp - V^2 / V_{th}^2}{\pi^{3/2}\, V_{th}^3}\ d_3 V \qquad (50)$$

where $V_{th}^2 = 2T/m$. In the Plateau (Landau) regime $qR < \lambda_c < (R/r)^{3/2}\, qR$

$$I(V_\perp) = \frac{\pi}{8} \frac{r^2}{R^2}\ m^2\ V_\perp^4$$

and in the banana (Zakharov and Karpman) regime $\lambda_c > (R/r)^{3/2} qR$

$$I(V_\perp) = \frac{1{,}38}{\sqrt{2}} \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} m^2 V_\perp \, qR \, \langle (\delta V_{||})^2 \rangle$$

where $\langle (\delta V_{||})^2 \rangle$ is the diffusion coefficient of the velocity $V_{||}$ along flux lines (which for particles with $V_{||} = 0$, amounts to $\langle (\delta V_\perp)^2 \rangle / 2$ in the Spitzer's notation [12]). Performing integrations in V space and minimizing $\delta \dot{M}_R + \delta \dot{M}_z$ with respect to $\underline{\Omega}_a$ gives

$$\dot{S} + \delta \dot{M} = \sum_{z,H} \delta \dot{M}_R = \iiint d_3 x \, \frac{1}{I_{0H} + I_{0z}} \frac{r^2}{R^2} \, 4 T^2 \, qR \, (2\pi c)^2$$

$$\left(\left(\frac{1}{e_H} \frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_T} - \frac{1}{e_z} \frac{\partial \underline{n}_z}{\underline{n}_z \partial \psi_T} \right)^2 I_{0z} I_{0H} \right.$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{e_H} \frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_T} - \frac{1}{e_z} \frac{\partial \underline{n}_z}{\underline{n}_z \partial \psi_T} \right) \frac{\partial \underline{I}}{\underline{I} \partial \psi_T} \left(\frac{I_{0z} I_{1H}}{e_H} - \frac{I_{0H} I_{1z}}{e_z} \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial \underline{I}}{\underline{I} \partial \psi_T} \right)^2 \left(\left(I_{2H} I_{0H} - I_{1H}^2 \right) \frac{1}{e_H^2} + \left(I_{2z} I_{0z} - I_{1z}^2 \right) \frac{1}{e_z^2} \right.$$

$$\left. \left. + \left(I_{2H} I_{0z} + I_{2z} I_{0H} + 2 I_{1H} I_{1z} \right) \frac{1}{e_H e_z} \right) \right)$$

where for the assembly H or Z

$$I_p = \frac{n}{\pi^{1/2} V_{th}} \int_0^\infty \exp(-x) \left(x - \frac{3}{2}\right)^p \alpha(x)\, dx$$

Plateau : $\alpha = \pi x^2/8$; Banana : $\alpha\left(\frac{V_\perp^2}{V_{th}^2}\right) = \frac{1,38}{\sqrt{2}} \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \frac{qR \langle (\delta V_{//})^2 \rangle V_\perp}{V_{th}^4}$

Extremalizing $\dot{M}$ given by (49) with respect to the profiles $n_H(\Psi_T)$, $n_Z(\Psi_T)$ produces the evolution equation

$$\frac{\partial n\ (\Psi_T, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \Gamma)$$

where the average flux Γ of ions H or Z across the « magnetic surface r is :

$$\Gamma_H = -\frac{e_z}{e_H} \Gamma_z = -\frac{q V_{thH}^2}{R} \rho_{thH}^2 \frac{I_{0z} I_{0H}}{I_{0H} + I_{0z}} \left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{e_H}{e_z} \frac{\partial n_z}{n_z \partial r} + \alpha \frac{\partial T}{T \partial r} \right)$$

$$\alpha = \left(\frac{I_{1H}}{I_{0H}} - \frac{I_{1z}}{I_{0z}} \frac{e_H}{e_z} \right) \# \frac{I_{1H}}{I_{0H}}$$

$$\rho_{th} = V_{th} \left(\frac{eB}{mc}\right)^{-1}$$

generalizing the result given in [13]. If the H ions are in the plateau regime, $\alpha = 3/2$ and the temperature gradiant enhanc the plasma contamination. If the ions are in the banana regime, α varies from $-1/2$ for $n_z z^2/n_H \gg 1$ to $-0,2$ for $n_z z^2/n_H \ll 1$. Decontamination by the temperature gradient is possible if $n_z z^2/n_H \geq 1$.

2°/ Light ions H in the banana or the Plateau regime; Impurity ions Z in the Pfircsh Schluter regime.

— If $\lambda_{cz} < qR$, as it is the case for most impurity species in present Tokamaks, we cannot usefully describle the impurities Z by a distribution function $F(J,t)$ in J space because the condition (21) is not fulfilled for those ions. However if $\lambda_{cH} > qR$, such a description may be continued for the light ions H. We then have to make extremum the functional

$$\dot{M}(\underline{u}_H, \underline{u}_z) = 2 \iiint \left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial t} \operatorname{Log} \underline{n}_H + \frac{3}{2} \frac{\partial T}{T \partial t} \log \underline{T} \right) d_3x + \frac{2}{\odot} \int \cdots \frac{d\mathcal{F}_z}{dt} \underline{u}_z \, d_3x \, d_3p + \dot{S}(\underline{u}_H, \underline{u}_z) + \delta \dot{M}(\underline{u}_H, \underline{u}_z) \qquad (51)$$

where we have used (48 b) again for H ions.

To simplify we will neglect the temperature gradient of the Z ions, which appears in the expression of the transport coefficients with the factor e_H/e_z and therefore, plays in general a minor role (We therefore put $T_z = 0$). The high

collisionality of z ions then imposes to the distribution function $\mathcal{F}_z = A_z \exp -((\mathcal{H}_z - \mathcal{U}_z)/\Theta)$ to be a shifted maxwellian at each point. Mechanical equilibrium in the radial direction and continuity of the assembly z further imposes to $\mathcal{U}_z$ or $\underline{\mathcal{U}}_z \neq \mathcal{U}_z$ to be of the form

$$\frac{\underline{\mathcal{U}}_z}{\Theta} = \frac{m_z R_0}{\Theta}\left(\underline{\Omega}'_{az}(\psi_T)\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right) - \frac{2\pi c}{e_z}\,\Theta\,\frac{\partial \underline{n}_z}{\underline{n}_z\,\partial\psi_T}\, q\left(1 + \frac{r}{R}\cos\theta\right)\right) V_{\parallel} + \mathrm{Log}\left(\underline{n}_z(\psi_T)\right) \qquad (52a)$$

The variable $\underline{\Omega}'_{az}$ reflects the macroscopic parallel motion superimposed to the diamagnetic motion in the φ direction. The assembly z has a θ averaged angular velocity in the φ direction

$$\underline{\Omega}_{az}(\psi_T) = \underline{\Omega}'_{az}(\psi_T) - \frac{2\pi c}{e_z}\,\Theta\, q\,\frac{\partial \underline{n}_z}{\underline{n}_z\,\partial\psi_T} \qquad (52b)$$

The term proportional to $d\mathcal{F}_z/dt$ in (51)may be taken as

$$\frac{2}{\Theta}\int \cdots \frac{d\mathcal{F}_z}{dt}\,\underline{\mathcal{U}}_z\; d_3x\, d_3p = 2\int \frac{\partial n_z(\psi_T, t)}{\partial t}\,\mathrm{Log}\left(\underline{n}_z\right)\, d_3x \qquad (53)$$

— For given test profiles $\underline{n}_H$, $\underline{n}_z$ and $\underline{T}_H$, the values of the variables $\underline{\Omega}_{aH}$ which determines $\underline{u}_H$ through (48a) and $\underline{\Omega}_{az}$ are obtained at zeroth order in r/R by minimizing $\dot{S}(\underline{u}_H, \underline{u}_z)$. The minimum occurs again at this order when all particles have the same θ averaged velocity in the φ direction , i.e. , if

$$\underline{\Omega}_{aH}(\psi_T, h) = \underline{\Omega}_{az}(\psi_T)$$

At next order $\dot{S} + \delta\dot{M}$ is equal to the resonant entropy production $\delta\dot{M}_R(\underline{u}_H)$ given by (50). However minimization with respect to $\underline{\Omega}_{aH}$ gives

$$\underline{\Omega}_{aH} = \underline{\Omega}_{az} = -\dot{q}\,\underline{T}_H \frac{2\pi c}{e_H}\left(\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial\psi_T} + \frac{I_{1H}}{I_{0H}}\frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial\psi_T}\right) \qquad (54a)$$

and

$$\delta\dot{M}_R(\underline{u}_H) = \iiint d_3x \,\frac{r^2}{R^2}\, 4T^2 q R \left(\frac{2\pi c}{e_H}\right)^2 \left(I_{2H} - \frac{I_{1H}^2}{I_{0H}}\right)\left(\frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial\psi_T}\right)^2 \qquad (54b)$$

independant of the density profiles $\underline{n}_H$, $\underline{n}_z$. The entropy production associated with the transport of particles therefore results from the residual value of $\dot{S}(\underline{u}_H, \underline{u}_z)$ and from the frictional correction $\delta\dot{M}_F(\underline{u}_H, \underline{u}_z)$ given

by (27). What happens in the present case is that, as long as the θ averaged angular velocities in the φ direction $\underline{\Omega}_{aH}$ and $\underline{\Omega}_{az}$ are equal, the Z ions, because of their higher collisionality, produce a small amount of entropy whatever $\underline{\Omega}_{az}$. The value of $\underline{\Omega}_{aH}$ may then adjust without further constraint to minimize the resonant friction of H ions with the θ modulation δB of the magnetic field. In absence of temperature gradient $\partial T_H / \partial \psi_T$, the value of $\underline{\Omega}_{aH}$ adjusts so that the assembly H has no macroscopic motion in the θ direction ($\partial \underline{u}_H / \partial J_2 = 0$) and this resonant friction cancels. The entropy production then results from the local differences between the macroscopic velocities of H and Z ions and also from the detailed structure of the distribution function of the weakly collisional H ions, and is given by $\dot{S} + \delta \dot{M}_F$. Using (27) and (48), (52) (54) and taking into account (46) and (47) it is readily found that

$$\dot{S} + \delta \dot{M} = \delta \dot{M}_R(\underline{u}_H) + \dot{S}(\underline{u}'_H, u'_2 = 0) \qquad (55)$$

where

$$\frac{\mathcal{U}'_H}{\omega} = -\sum_{\pm} \frac{1}{2} q\, m\, r\, \exp(\pm i\theta)$$

$$\left(2\left(\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_T} - \frac{e_H}{e_z}\frac{\partial \underline{n}_z}{\underline{n}_z \partial \psi_T}\right) V_{\parallel} + \frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial \psi_T}\left(\left(\frac{1}{2}\frac{mV^2}{T} - \frac{3}{2}\right)\left(V_{\parallel} + \frac{1}{2}\frac{V_\perp^2}{V_{\parallel} \mp \frac{i\varepsilon}{qR}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{I_{1H}}{I_{0H}}\left(V_{\parallel} - \frac{1}{2}\frac{V_\perp^2}{V_{\parallel} \mp \frac{i\varepsilon}{qR}}\right)\right)\right) \frac{2\pi c}{e_H}$$

and ε tends to 0 by positive values. The terms of $\dot{S}(\mathcal{U}'_H, \mathcal{U}'_z = 0)$ diverging as ε^{-3}, ε^{-1} must be left out. The residue which must be kept if the H ions are in the Landau case cancels in the present situation. Using (6) with $m_z \gg m_H$, one finds

$$\dot{S}(\mathcal{U}'_H, \mathcal{U}'_z = 0) = \iiint d_3x\, m^2 V_{th,H}^2 \left(\frac{2\pi c}{e_H}\right)^2 \frac{1}{T_{Hz}}\, q^2 r^2$$

$$\left(\left(\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_T} - \frac{e_H}{e_z}\frac{\partial \underline{n}_z}{\underline{n}_z \partial \psi_T}\right)^2 - \frac{\partial \underline{T}_H}{\underline{T}_H \partial \psi_T}\left(\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial \psi_T} - \frac{e_H}{e_z}\frac{\partial \underline{n}_z}{\underline{n}_z \partial \psi_T}\right)\right)$$

where

$$\frac{1}{\tau_{HZ}} = \frac{4\sqrt{2\pi}\, n_Z e_Z^2 e_H^2 \, \mathrm{Log}\,\Lambda}{3\, m_H^{1/2}\, T^{3/2}}$$

Making the functional $\dot{M}$ given by (51) (53) and (55) extremum with respect to the test density profiles $\underset{H}{n}_H$, $\underset{Z}{n}_Z$ or Z , we finally obtain a flux of particles of the Pfirsch Schluter type

$$\Gamma_H = -\frac{e_Z}{e_H}\,\Gamma_Z = -\frac{\rho_{thH}^2}{\tau_{HZ}}\, n_H\, q^2 \left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{e_H}{e_Z}\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} + \alpha \frac{\partial T}{T \partial r} \right) \qquad (56)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

consistent with the result given in [14], [15], [16].

The decontamination is possible by inducing a temperature gradient $\partial \mathrm{Log}\, T / \partial \mathrm{Log}\, n > 2$, whatever the ratio $n_Z Z^2 / n_H$.

— One may note that the formula (56) is only valid if there is no parallel forces on the Z ions associated to a θ variation $\delta\Psi$ of the electrostatic potential Ψ ($F_{\parallel Z} = -e_Z\, \partial \delta\Psi / q R \partial\theta$), which could be due for instance to the presence of high energy trapped light ions

produced by neutral beam injection or ion cyclotron resonant heating. The effect of such a variation $\delta\Psi$ on thermal light ions H may be taken into account by adding $-e_H\,\delta\Psi$ to the perturbation $-\mu\,\delta B$: this simply results in a new value of the amplitude $\Delta(J)$; the effect is neglible if $e_H\,\delta\Psi/T < r/R$. The influence of $\delta\Psi$ on the Z ions may be more important because of the large value of e_Z . The first effect of $\delta\Psi$ is obviously to concentrate the Z assembly near the equatorial plane, at $\theta = \pi$ for instance, according to the law

$$n_z(x) = n'_z(\psi_T)\ \exp(-e_z\,\delta\Psi/\Theta)$$

The variable $\underline{\Omega}'_{az}$ in (52) which reflects the parallel macroscopic motion of the Z ions superimposed to the diamagnetism along φ (in the present frame of reference where the θ averaged radial electric field cancels) is then no longer constant over the magnetic surfaces. The continuity equation imposes that

$$\underline{\Omega}'_{az} = \underline{\Omega}''_{az}(\psi_T)\ \exp\left(\frac{e_z\,\delta\Psi}{\Theta}\right)$$

Minimizing the entropy production $\dot{S}(\underline{u}_H, \underline{u}_Z) + \delta\dot{M}_R(\underline{u}_T)$ gives

$$\underline{\Omega}'_{az} = 0\ ,\quad \underline{\Omega}_{az} = -\frac{2\pi c}{e_z}\,q\,\Theta\,\frac{\partial \underline{n}'_z}{\underline{n}'_z\,\delta\psi_T}$$

if

$$\left|\frac{e_z\,\delta\Psi}{\Theta}\right| > 1 \qquad (57)$$

In fact, if the Z assembly exhibits a macroscapic parallel velocity $\underline{\Omega}'_{az}$, this velocity is strongly modulated along θ because of the strong modulation of n_z (through the continuity equation). A strong friction with the H ions results, whatever the θ averaged value of $\underline{\Omega}'_{az}$. This effect prevents any parallel motion $\underline{\Omega}'_{az}$ of the Z ions if the condition (57) is satisfied. The minimization of the residual value of $\dot{S}(\underline{u}_H, \underline{u}_z) + \delta\dot{M}_R(\underline{u}_H)$ produces

$$\underline{\Omega}_{aH} = -q\,\underline{\tau}_H \frac{2\pi c}{e_H}\left(\frac{\partial \underline{n}_H}{\underline{n}_H \partial\psi_T} + \frac{I_{1H}}{I_{oH}}\frac{\partial T_H}{T_H \partial\psi_T}\right), \quad \dot{S} + \delta\dot{M}_R \neq \dot{S}$$

if $n_z z^2/n_H \ll (r/R)^{1/2}\ \mathrm{Min}\,(1,\alpha)$

where $\alpha = (\lambda_{cH}/qR)(r/R)^{3/2}$, and

$$\underline{\Omega}_{aH} = \underline{\Omega}_{az}, \quad \dot{S} + \delta\dot{M}_R \neq \delta\dot{M}_R$$

in the opposite case. In the first case the flux $\Gamma_H = -(e_z/e_H)\,\Gamma_z$ is larger than the normal flux Γ_H given by (56) by a factor $\sim R^2/r^2$

$$\Gamma_H = -\frac{R^2}{2r^2} q^2 \frac{\rho^2_{thH}}{\tau_{Hz}} n_H \left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{e_H}{e_z}\frac{\partial n_z}{n_z \partial r} + \alpha\frac{\partial T}{T\partial r}\right)$$

In the second case the flux Γ_H recovers a value of the banana or Plateau type

$$\Gamma_H = -I_{oH}\frac{q\,V^2_{thH}}{R}\rho^2_{thH}\left(\frac{\partial n_H}{n_H \partial r} - \frac{e_H}{e_z}\frac{\partial n_z}{n_z \partial r} + \alpha\frac{\partial T}{T\partial r}\right)$$

In both cases $\alpha = I_{1H}/I_{0H}$. The neoclassical behaviour of impurities should be therefore strongly changed if the condition (57) is fulfilled.

b/ Viscosity

—The frictional production of entropy $\delta\dot{M}_F$ plays also a leading role in the transport of φ momentum across the magnetic surfaces. To simplify we consider only H ions in the banana or plateau regime (and drop the subscript H). At zeroth order in r/R ,we have again to minimize $\dot{S}(\underline{u})$, with $\underline{u}$ given by (48). This continues to impose $\underline{\Omega}_a(\psi_T, h, t) = \underline{\Omega}_a(\psi_T, t)$. At next order the residual value of $\dot{S}(\underline{u}) + \delta\dot{M}(\underline{u})$ reduces to $\delta\dot{M}_R(\underline{u})$ proportional to $(\partial\underline{u}/\partial J_2)^2$ for $\partial h/\partial J_2$. Of course we have now to take into account the derivatives $\partial\underline{\Omega}_a/\partial\psi_T$ and $\Omega_E = -q\,2\pi c\,\partial\psi/\partial\psi_T$, the drift electric angular velocity in the direction. However the minimization of $\delta\dot{M}_R(\underline{u})$ produces for $\underline{\Omega}_a - \Omega_E$ the value (54 a) and for $\delta\dot{M}_R$ the value (54 b) . The latter does not depend on the test angular velocity $\underline{\Omega}_a$, so that the viscosity effect corresponds again to the production of entropy $\dot{S}(\underline{u}) + \delta\dot{M}_F(\underline{u})$. We find

$$\dot{S}(\underline{u}) + \delta\dot{M}(\underline{u}) = \delta\dot{M}_R(\underline{u}) + \dot{S}(\underline{u}')$$

Where

$$\frac{\mathcal{U}'}{\Theta} = -\,q\,m\,r\cos\theta\;\;\frac{2\pi c}{e}\;R_0 m\;\frac{\partial(\underline{\Omega}_a/\underline{I})}{\partial\psi_T}\left(V_{//}^2+\frac{V_\perp^2}{2}\right)$$

Using (6) we obtain

$$\dot{S}(\mathcal{U}') = \frac{1}{10}\iiint d_3x\; m^2 V_{th}^2\; n\left(\frac{2\pi c}{e}\right)^2\;\frac{1}{\tau_H}\;q^2 r^2 R^2 T m\left(\frac{\partial\,\underline{\Omega}_a/\underline{I}}{\partial\psi_T}\right)^2$$

where

$$\frac{1}{\tau_H} = \frac{4\,\pi^{1/2}\,n\,e^4\,\mathrm{Log}\,\Lambda}{3\,m^{1/2}\;T^{3/2}}$$

Further extremalization of $\dot{M}(\underline{u})$ with respect to the profile $\underline{\Omega}_a(\psi_T, t)$, with of course (48c) retained in the term proportional to $\partial f/\partial t$, results in the evolution equation for the toroidal macroscopic velocity $R_0\,\Omega_a$ of the assembly

$$\frac{\partial\, n m R_0 \Omega_a}{\partial t} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\Gamma_p\right)$$

where the flux of momentum through the magnetic surfaces is given by

$$\Gamma_p = -\,\frac{1}{10}\,\frac{n}{\tau}\,\rho_{th}^2\,q^2\,m\,\frac{\partial(R_0\,\Omega_a)}{\partial r}$$

consistent with the result given in [16] for the banana regime.

VII. CONCLUSION

As long as a plasma consists of assemblies of particles basically confined by an integrable Hamiltonian, a fundamental problem is to estimate the irreversible evolution due to an electromagnetic perturbation. The formalism that we have developed in this article gives a standard method, applicable in Standard conditions, to solve this problem, in the case of a simple " harmonic" perturbation. It then clearly reflects the resonant action i various regimes and the bulk frictional or adiabatic effects induced by the perturbation, as they superimpose to the transport in the mperturbed state. The method may be generalized, by adding further terms in the expression of the functional $\delta\dot{M}(\underline{u})$ in the principle (2) , to more complicate (and important) cases, for instance the case of two harmonic perturbations producing overlapping trapped domains or of many perturbations producing ergodicity. Another interesting line is the close relation which exists between the functional $\delta\dot{M}$ and the self consistency of both the electromagnetic field producing the integrable Hamiltonian and the electromagnetic field of the perturbation.

REFERENCES

[1] L. BRILLOUIN in L'atome de Bohr,Chap. 6, Presses Universitaires de France, PARIS (I931).

[2] V.I. ARNOLD in Mathematical Methods of Classical Mechanic, Chap. IO, Ed. MIR, MOSCOU (1974).

[3] B.B. ROBINSON and I.B. BERNSTEIN,Ann. Phys. (N.Y.), I8 (I962) 110.

[4] M.N. ROSENBLUTH ,R.D. HAZELTINE and F.L. HINTON, Phys. Fluids,15 (1972) 116.

[5] E. CANOBBIO ,in Plasma Physics and Controlled Fusion Research 1971, Vol. III,p 491, IAEA, Vienna (1971).

[6] W.E. DRUMMOND and D. PINES, Nuclear Fusion Supplement,Part 3, (1962) 1049.

[7] V.N. TSYTOVICH , in Theorie of Turbulent Plasma ,p 95, Consultants Bureau, New York (1977).

[8] V.E. ZAKHAROV and V.I. KARPMAN, JEPT,43 (1962), 490.

[9]L.LANDAU , Zh. Eksp.Teor.Fiz,7 (1937).203.

[10]S.I. BRAGINSKY,in Reviews of Plasma Physics,Vol I, Consultants Bureau, New York (1965).

[11]M.D. KRUSKAL, Journal Math. Phys.,3 (1962) 806.

[12] L. SPITZER ,in Physics of Fully Ionised Gases,p. 74,Interscience Publishers, New York (1956).

[13] J.W. CONNOR, Plasma Phys., 15 (1973) 765.

/ 14 / R. DEICAS and A. SAMAIN,in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1974 ,Vol I,p.563, IAEA Vienna (1975).

[15] A. SAMAIN and F. WERKOFF, Nuclear Fusion 17 (1977) 53.

[16] S.P. HIRSHMAN and D.J. SIGMAR, Phys. Fluids,20 (1977) 418.

[17] M.N. ROSENBLUTH,P.H. RUTHERFORD, J.B. TAYLOR, E.A. FREEMAN and L.M. KOVRIZHNIKH,in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1971, Vol I,p .495, IAEA, Vienna (1971).

Journal of Nuclear Materials 76 & 77 (1978) 542–545
© North-Holland Publishing Company

RADIOFREQUENCY DIVERTOR FOR TOKAMAKS

R. DEI-CAS, G. REQUIN and A. SAMAIN

Association Euratom-CEA sur la fusion, Département de Physique du Plasma et de la Fusion Contrôllée, Centre d'Etudes Nucléaires, Boîte Postale no 6. 92260 Fontenay-aux-Roses, France

We discuss a possibility of extracting impurities at the plasma edge, which is based on the application of a RF electric field, combined with the presence of a modulation of the static magnetic field around the major axis. The principle of the method is to increase the transverse energy of the impurity ions at the plasma edge by cyclotron resonance. Under the influence of the RF field, these ions eventually become trapped in the local mirrors due to the modulation of the magnetic field and then drift outside the plasma. We first compute the probability of extraction of an impurity ion when it meets the resonance region; this lays down a condition on the minimum RF field which should be applied. This RF field may be created as Alfven waves either compressional (propagating radially) or torsional propagating along the flux lines.

1. Trapping and extraction of impurity ions by a RF field

The problem of preventing accumulation of impurities in a tokamak configuration is currently envisioned through the use of magnetic divertors [1]. In this paper we consider another possibility based on the use of an RF electromagnetic field [2]. We assume that the magnetic field is modulated as

$$B = B_0(1 - \epsilon \cos M\varphi + (r/R)\cos\theta)$$

(cf. fig. 1), where $M = 2\pi R/L$ and L is the distance between two toroidal coils. In the region at the plasma edge where $\theta \simeq \frac{1}{2}\pi$, the field $\boldsymbol{B}$ varies along a flux line (abscissa z; $z = 0$ at the middle point between two coils) as

$$B = B_0[1 - \epsilon\cos(2\pi z/L) + (r/R)(z/qR)].$$

We assume that $\epsilon >> (r/qR^2)(L/2\pi)$ so that local magnetic mirrors effectively appear. We apply an electric field $\boldsymbol{E}\exp(-i\omega t + cc)$, principally directed perpendicular to the magnetic field. This field is resonant with impurity ions (mass m, charge Ze) on the surface $\omega = -\omega_c(z) = ZeB(z)/m$ depicted on fig. 2. When an impurity ion on a given flux line crosses the resonant surface, it gains transverse energy and becomes trapped eventually between local mirrors. It then crosses the resonant surface again in its successive bounces, and receives more and more energy. If its guiding center velocity due to the curvature R^{-1} of the flux line is directed outwards, extraction will result.

When crossing the resonant surface along a flux line, at $z = z_0$, the longitudinal velocity of a test ion is unchanged. The transverse velocity experiences a sudden variation $\Delta v_\perp$, such that [3]

$$|\Delta v_\perp| = \frac{Ze}{m}|E_x + iE_y|\left|\frac{2\pi}{\omega_c'(z_0)v_\parallel}\right|^{1/2}, \qquad (1)$$

where x and y are two arbitrary directions perpendicular to $\boldsymbol{B}$ and $\omega_c'(z_0) = [\nabla_\parallel \omega_c]_{z_0}$. The direction of $\Delta v_\perp$ is randomly distributed. The ion will be trapped between the mirrors on each side of the resonant surface if $|\Delta v_\perp|$ is larger than the velocity at the frontier of the loss cone. On average, this condition can be written as

$$v_{\perp 0} \equiv \frac{Ze}{m}|E_x + iE_y|\left(\frac{L}{\epsilon\omega v_{th}}\right)^{1/2} >> \frac{v_{th}}{\epsilon^{1/2}}. \qquad (2)$$

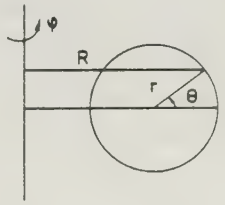


Fig. 1. Tokamak geometry.

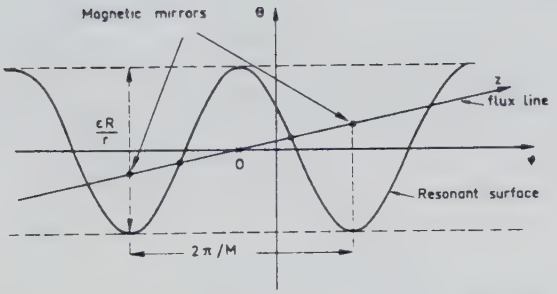


Fig. 2. Intersection of the resonant surface and a magnetic line.

The ion then experiences a random walk motion in the perpendicular velocity space. As the velocity is increased by the random vector $\Delta \boldsymbol{v}_\perp$ each time it crosses the resonant surface, the diffusion coefficient is given by $D_{RF} = \overline{(\Delta v_\perp^2)}/\tau$ where τ is the quarter of the bounce period: $\tau = 2\pi/4\omega_b = (2\pi/4)(v_\perp^2 \epsilon/2L^2)^{-1/2}$. The coefficient D_{RF} is then proportional to $v_\perp$. We obtain:

$$D_{RF} = K\frac{v_\perp}{v_\parallel};$$

$$K = \left(\frac{Ze}{m}\right)^2 |E_x + iE_y|^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}\,\omega\pi} \quad . \tag{3}$$

In the absence of collisions the velocity $v_\parallel$ at the resonant surface is the initial velocity $\simeq v_{th}$. We then have $D_{RF} = D_0' v_\perp$ where $D_0' = K/v_{th}$. It may be shown that if $P(t)$ is the probability that the ion has been detrapped before time t, we have:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)dt = (1-P)\frac{4v_{\perp 0}v_{th}}{\epsilon\overline{v_\perp^2}(t)}\ \frac{1}{2}\ \frac{2v_{th}}{2\pi v_{\perp 0}}\ \frac{dt}{\tau(v_{\perp 0})} \quad . \tag{4}$$

Integration of this equation from the time t such that $\overline{v_\perp^2} \simeq v_{\perp 0}^2$ shows that the probability $P(t)$ remains finite for large t: $P(\infty) \simeq v_{th}^2/\epsilon v_{\perp 0}^2$, and is small if condition (2) is satisfied. This result is due to the fact that the diffusion coefficient D_{RF} is proportional to $v_\perp$.

We now consider the effect of collisions, which increase the parallel velocity of particles. We first note that an obvious condition for the particle to remain trapped is that the squared average value $\overline{v_\parallel^2}$ of $v_\parallel$ at a time of order τ is much less than the value $\epsilon v_{\perp 0}^2$ of $v_\parallel^2$ at the loss cone for $v_\perp \simeq v_{\perp 0}$. Putting $\overline{v_\parallel^2} = D_\parallel(v_\perp)t$, we must have $D_\parallel(v_{\perp 0})\tau \ll \epsilon v_{\perp 0}^2$, i.e., $D_\parallel(v_{\perp 0}) \ll \epsilon D_{RF}(v_{\perp 0}, v_{th})$. In these conditions, the effect of collisions is negligible before the particle has a mean square $\overline{v_\perp^2} \gg v_{\perp 0}^2$. We accordingly consider the diffusion process at a later stage. To simplify, we consider the case where collisions with hydrogen ions are dominant and assume that the velocity $v_{\perp 0}$ is larger than the thermal velocity of the latter. We then have:

$$D_\parallel(v_\perp) \simeq A_D \frac{1}{v_\perp} \simeq A_D \frac{1}{(\overline{v_\perp^2})^{1/2}} \quad ,$$

$$A_D = \frac{8\pi e^4 n_H Z^2 \log\Lambda}{m^2}\, 81 \times 10^{18} \quad . \tag{5}$$

On the other hand we obtain from eq. (3) an estimation of D_{RF} in the form $D_{RF} \simeq K(\overline{v_\parallel^2})^{1/2}/(\overline{v_\parallel^2})^{1/2}$. Integrating the system $d\overline{v_\perp^2}/dt = D_{RF}$ and $d\overline{v_\parallel^2}/dt = D_\parallel$ (with $v_\parallel \simeq v_{th}$ and $v_\perp \simeq v_{\perp 0}$ for $t = 0$), we obtain at time t:

$$(\overline{v_\parallel^2})^{1/2} \simeq v_{th} + \frac{A_D}{K}\left(\log\left[\frac{(\overline{v_\perp^2})^{1/2}}{v_{\perp 0}}\right] - 1\right) \quad , \tag{6}$$

$$(\overline{v_\perp^2})^{1/2}\left(\log\left(\frac{(\overline{v_\perp^2})^{1/2}}{v_{\perp 0}}\right) - 1\right) + ((\overline{v_\perp^2})^{1/2} - v_{\perp 0})$$

$$\times \left(\frac{Kv_{th}}{A_D} - 1\right) \simeq \frac{K^2 t}{2A_D} \quad . \tag{7}$$

For large transverse velocity $v_\perp > (\overline{v_\parallel^2}/\epsilon)^{1/2}$, the probability density $\mathcal{P}(v_\perp, v_\parallel, t)$ in the space $v_\perp, v_\parallel$ is the Maxwellian:

$$\mathcal{P}(v_\perp, v_\parallel, t) = \mathcal{P}_M(v_\perp, v_\parallel, t)$$

$$= \frac{(1-P(t))}{\pi^{3/2}(\overline{v_\parallel^2})^{1/2}\overline{v_\perp^2}} \exp -\left(\frac{v_\perp^2}{\overline{v_\perp^2}} + \frac{v_\parallel^2}{\overline{v_\parallel^2}}\right) \quad , \tag{8}$$

where again $P(t)$ is the probability that the particle has been detrapped at time t.

For $v_\perp < (\overline{v_\parallel^2}/\epsilon)^{1/2}$, the density $\mathcal{P}(v_\perp, v_\parallel, t)$ is determined by the diffusion equation, and the boundary conditions $\mathcal{P} = 0$ at the loss cone and $\mathcal{P} = \mathcal{P}_M$ for $v_\perp = (\overline{v_\parallel^2}/\epsilon)^{1/2}$. It may be shown that we have approximately:

$$\mathcal{P}(v_\perp, v_\parallel, t) = \frac{(\epsilon)^{1/4} v_\perp^{1/2}}{(\overline{v_\parallel^2})^{1/4}}\left(1 - \frac{v_\parallel^2}{\epsilon\overline{v_\perp^2}}\right)$$

$$\times \mathcal{P}((\overline{v_\parallel^2}/\epsilon)^{1/2}, 0, t) \quad . \tag{9}$$

We may then calculate the integral on the loss cone surface of the flux of probability $D_{RF} \cdot \nabla_\perp \mathcal{P} + D_\parallel \cdot \nabla_\parallel \mathcal{P}$. Equating this integral to dP/dt, we obtain:

$$\frac{dP}{dt} = (1 - P(t)) \frac{4}{7(\pi\epsilon)^{1/2}} \times \left(K + \frac{14}{5} \frac{A_D}{(\overline{v_\parallel^2})^{1/2}}\right) \frac{1}{(\overline{v_\perp^2})} \quad . \tag{10}$$

Integration of this equation, taking into account eqs. (6) and (7), from a time t such that $\overline{v_\parallel^2} \simeq \epsilon v_{\perp 0}^2$ shows that the probability remains small at every time t if we have:

$$\frac{\epsilon v_{\perp 0}^2}{v_{th}^2} >> \left(\frac{A_D}{K v_{th}}\right)^2 \quad \text{and} \quad \left(\frac{A_D}{K v_{th}}\right), \tag{11}$$

which, together with the previous condition (2), means that a particle impinging on the resonant surface has a large probability of being extracted from the plasma.

In the region of the local mirrors where the RF field is applied, and in which there is a density of impurity ions n, the number of extracted particles per second is equal to $N = nS\bar{v}_d$ where $S = 2\pi R \times (LB_\theta/B)$, (the RF field is assumed applied all around the major axis). The average ion guiding center drift velocity is given by $\bar{v}_d = T_\perp/m\omega_c R$, where $T_\perp$ is the average transverse energy of the trapped ions. We may estimate this energy by noting that the ion experiences the extraction effect during the time $\Delta t = \delta/\bar{v}_d$, where δ is the radial extension of the RF field. We then have:

$$T_\perp = \frac{m v_{\perp 0}^2}{2} \left[\frac{\delta \omega_c}{v_{\perp 0}} \frac{R\sqrt{2\epsilon}}{\pi L}\right]^{1/2} . \tag{12}$$

The average flux of extracted impurities $\Phi = N/(2\pi R) \times (2\pi r)$ is related to the density n by:

$$n = \frac{2\pi q R^2 \omega m}{LT} \Phi, \tag{13}$$

where q is the safety factor at the plasma edge.

2. Creation of the RF field in the resonance region

The problem is now to introduce the RF field into the region where we will use it. We have the choice between two different methods. The first is to use an Alfven compression wave generated by coils as depicted in fig. 3. If d is the distance between the coils, assumed to be excited in opposite phase, the RF field exhibits a wave number along the flux line $k_\parallel = \pi/d$. On the other hand, if the coils have an extension d' in the Θ direction, we have $k_\Theta \sim \pi/d'$. The radial penetration of the compressional wave takes place over a distance $\delta \sim k_r^{-1}$ where $k_r^2 = \omega^2/c_A^2 - k_\Theta^2 - k_z^2$.

The useful component $E_x + iE_y$ of the RF field is smaller than the electric field E_0 outside the plasma because of the resonance of the ions. We find:

$$\frac{E_x + iE_y}{E_0} = \left(\frac{\lambda^2}{2 + \lambda^2}\right)^{1/2} ,$$

$$\lambda = \frac{|\omega^2 - k_\parallel^2 c^2| k_\parallel v_{th}}{\omega_p^2 \sqrt{\pi}\, \omega} , \tag{14}$$

where ω_p is the impurity ion plasma frequency. This equation, together with eqs. (13), (2) and (11) gives the necessary value of E_0 to extract a flux Φ.

Another possibility is to excite a torsional Alfven wave by a coil system of the type depicted in fig. 4. This system is assumed to be Θ-shifted with respect to the resonant region $\omega = \omega_c$. In front of the coils, because of the Θ variation of the static field B, the impurity ions are nonresonant. We may therefore neglect their presence. If the coil system generates an electric current of the form $\exp(il\Theta + ip\Phi - i\omega t)$ + cc, an Alfven mode with the same geometry will be eventually excited near the radius r^* such that: $\omega = k_\parallel c_A(r^*) = [(p + l/q(r^*))/R] c_A(r^*)$, where c_A is the Alfven velocity at radius r, and will propagate along the flux lines up to the resonance region. It results from the magnetic beach theory [4] that it

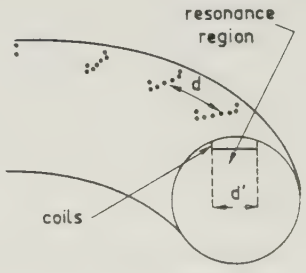


Fig. 3. Coil arrangement for the compressional case.

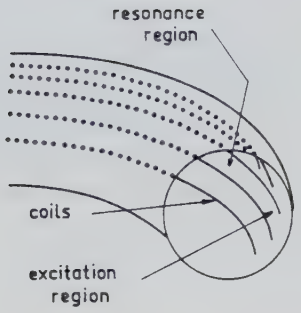


Fig. 4. Coil arrangement for the torsional case.

will then be completely absorbed by cyclotron resonance with impurity ions. We find that the resonant field $E_{r=r^*}$ takes place over a radial interval $\delta = (2\omega_p/3c)^{-2/3}(\partial n/n\partial r)^{-1/3}$, and that it is enhanced with respect to the value E_0 at the plasma edge ($r = r_0$) by the factor:

$$\frac{E_{r=r^*}}{E_0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(r_0 - r^*)^{1/2}}{(l/r^*)^{1/2}} \exp(-(r_0 - r^*)(1/r_0)). \tag{15}$$

The excited field effectively propagates in the θ direction outside the coil region if:

$$\delta < \frac{1}{2} \frac{\partial n}{n \partial r} (l + pq(r^*))^{-1} . \tag{16}$$

The electric field $E_{r=r^*}$ is polarized in the r direction and generates a value of $v_{\perp 0}$ which, if it satisfies the conditions (2) and (11) allows trapping of impurity ions and subsequent extraction from the plasma. In this case the maximum average flux of impurity ions which may be extracted may be determined by expressing that the power which propagates along the flux line at velocity c_A from the coil to the resonance region is converted into kinetic energy of impurity ions:

$$\Phi = \frac{\delta}{T_\perp} \frac{\epsilon_0 |E_{r=r^*}|^2}{8\pi} \frac{c^2}{c_A^2} \frac{c_A}{qR} ,$$

where $T_\perp$ is given by eq. (12).

3. Conclusion

The calculations given above allow us to estimate the RF field E_0 near the coil system which is necessary to extract a given flux Φ of impurities and the energy $T_\perp$ of the diverted ions. The RF power is essentially transferred to the resonant impurity ion and amounts to $NT_\perp$. As a practical case, we take plasma conditions: $B_0 = 4T$, $\epsilon = 10^{-1}$ (The modulation ϵ at the plasma edge is not critical and could be reduced), $T = 100$ eV, $n_H = 10^{18}$ m^{-3}, $R = 1$ m, $r_0 = 0.2$ m, $L = 0.2$ m, and we examine the extraction of oxygen ions ($Z = 4$, $m = 16\, m_H$).

For the compressional case, taking $d = 0.1$ m and $d' = 0.2$ m we obtain $\delta = 3 \times 10^{-2}$ m. A field $E_0 = 10^4$ V/m is then able to extract a flux $\Phi = 10^{17}$ m$^{-2} \cdot$ s^{-1} of impurities with an energy of about 10 keV. A higher extraction would be hardly achievalbe because the shielding effect would considerably increase.

For the torsional case, choosing $p = 0$, $l = 3$, $\partial n/n\partial r = 20$ m^{-1}, we find $\delta = 10^{-2}$ m. A field $E_0 = 5 \times 10^3$ V/m is then able to extract a flux $\Phi > 10^{18}$ m$^{-2} \cdot$ s^{-1} of impurities with an energy of about 7 keV. The total RF power transferred to the particles is ~10 KW and is negligible compared to the normal power flux across the magnetic surfaces at the plasma edge. In order to avoid damage at the torus wall caused by the energetic diverted particles, the wall should be locally open in front of the local mirrors, to let the particles enter into burial chambers. (Of course the effect on the drift trajectories of the curvature of flux lines due to the ripples and of the electrostatic field if the space charge of the diverted ions (~10^{16} m^{-3}) is not fully neutralized outside the plasma, should be taken into account.)

References

[1] D.M. Meade et al., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1974, IAEA Vienna (1975), Vol. I, p. 605.
[2] R. Dei-Cas, A. Samain, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1974, IAEA Vienna (1975), Vol. I, p. 563.
[3] A.F. Kuckes, Plasma Phys. 10 (1968) 367.
[4] T.H. Stix, The theory of plasma waves (McGraw-Hill, New York, 1962) Ch. 10.
[5] D.G. Swanson, Physics of Fluids 18 (1975) 1269.

AGENCE INTERNATIONALE DE L'ENERGIE ATOMIQUE

HUITIEME CONFERENCE INTERNATIONALE
SUR LA PHYSIQUE DES PLASMAS ET LA RECHERCHE
CONCERNANT LA FUSION NUCLEAIRE CONTROLEE

Bruxelles, 1er—10 juillet 1980

IAEA-CN-38/ Y.2-1

Plasma Purification in Tokamaks by centrifugal effects

G. REQUIN and A. SAMAIN

ASSOCIATION EURATOM-CEA SUR LA FUSION
Département de Recherches sur la Fusion Contrôlée
Centre d'Etudes Nucléaires
Boîte Postale n° 6. 92260 FONTENAY-AUX-ROSES (FRANCE)

Ce polycopié reproduit le texte d'un mémoire qui sera présenté lors d'une réunion scientifique. Le texte en est provisoire et des changements de fond ou de détail pourront y être apportés avant publication. Il n'est communiqué qu'à la condition expresse de n'être cité ou reproduit sous sa forme actuelle dans aucun autre ouvrage. Les opinions et les thèses qui y sont avancées engagent uniquement la responsabilité des auteurs et ne reflètent pas nécessairement celles des gouvernements des Etats Membres désignants ou celles des organisations désignantes. *En particulier, l'AIEA et les autres organisations ou organismes patronnant éventuellement la réunion ne peuvent être tenus responsables de tout ou partie du texte qui y est reproduit.*

AGENCE INTERNATIONALE DE L'ENERGIE ATOMIQUE

HUITIEME CONFERENCE INTERNATIONALE
SUR LA PHYSIQUE DES PLASMAS ET LA RECHERCHE
CONCERNANT LA FUSION NUCLEAIRE CONTROLEE

Bruxelles, 1er—10 juillet 1980

IAEA-CN-38/Y.2-1

Plasma Purification in Tokamaks by centrifugal effects

G. REQUIN and A. SAMAIN

ASSOCIATION EURATOM-CEA SUR LA FUSION
Département de Recherches sur la Fusion Contrôlée
Centre d'Etudes Nucléaires
Boite Postale n°6. 92260 FONTENAY-AUX-ROSES (FRANCE)

Abstract

The effects of a significant rotation of a Tokamak plasma around the major axis on the penetration of impurities in the plasma bulk and on the linear stability of the electrostatic modes are examined. It appears that, due to the centrifugal effects, the neoclassical flux of impurity takes a larger value and could control the impurity behaviour. It has a stronger dependance on the thermal gradient of the light ions and is directed outwards for $\eta = d\log T/d\log n \gtrsim 2$ even for small values of Z_{eff}. On the other hand, by broadening the resonance of the impurity ions with the turbulent modes propagating in the direction of the electron diamagnetic velocity, a gradient $\partial V/\partial r$ of the plasma velocity V(r) could induce a purification effect due to these modes. If the plasma velocity is small compared to the thermal velocity, the rotation should not significantly affect the stability of the interchange modes and of the electrostatic modes associated with circulating ions. On the contrary the stability of the modes due to trapped ions could be improved by the gradient $\partial V/\partial r$ which tends to localize the mode radially. Practical methods of achieving the rotation are also considered, in particular a torsionnal magnetic pumping

Ce polycopié reproduit le texte d'un mémoire qui sera présenté lors d'une réunion scientifique. Le texte en est provisoire et des changements de fond ou de détail pourront y être apportés avant publication. Il n'est communiqué qu'à la condition expresse de n'être cité ou reproduit sous sa forme actuelle dans aucun autre ouvrage. Les opinions et les thèses qui y sont avancées engagent uniquement la responsabilité des auteurs et ne reflètent pas nécessairement celles des gouvernements des Etats Membres désignants ou celles des organisations désignantes. *En particulier, l'AIEA et les autres organisations ou organismes patronnant éventuellement la réunion ne peuvent être tenus responsables de tout ou partie du texte qui y est reproduit.*

acting on the plasma through magnetic islands. It is also noticed that, in the presence of proper ripples of the static magnetic field, a part of the energy of the α particles could be spontaneously converted into rotationnal energy.

I. Effects of a plasma rotation on the neoclassical flux of impurities.

A rotation around the major axis at the angular velocity Ω of the plasma, i.e. of the frame of reference where the radial electrostatic field vanishes, produces in this frame a gravitationnal potential $G(r,\theta) = -m\Omega^2R^2/2 \sim -m\Omega^2R_0 r\cos\theta$, where $R = R_0 + r\cos\theta$ is the major radius. This potential may be important for heavy ions of charge Z and mass m_Z, while being small for light ions of charge 1 and mass m_1, if we have $m_1\Omega^2R_0 r \ll T \ll m_Z\Omega^2R_0 r$. The potential G_Z then tends to accumulate the Z ions on each magnetic surface near the half outer equatorial plane $\theta = 0$. These ions, assumed in the Pfirsch Schlüter regime, cannot have a flux preserving motion along the flux lines around the magnetic axis without exhibiting a large velocity in the half plane $\theta = \pi$. This constraint prevents such a motion, with the consequence that the Z ions are nearly at rest in the considered frame of reference. This constrasts with the normal situation, where the Z ions take a mean velocity along the flux lines which minimize their friction with the light ions, so that their flux ϕ_Z^{NC} across the magnetic surfaces is of the Pfirsch Schlüter type, even if the light ions are in the banana regime [1] [2]. We actually assume such a regime. In presence of the rotation, the neoclassical flux ϕ_Z^{NC} is much larger :

$$Z\,\phi_Z^{NC} = X\,\frac{q^2\rho_1^2 n_1}{\tau_{1Z}}\left(\frac{\partial n_1}{n_1\partial r} - \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial \bar{n}_Z}{\bar{n}_Z\partial r} - \left(m_Z - Z\,\frac{m_1}{Z}\right)\frac{\Omega^2 R}{T}\right) - \alpha\frac{\partial T}{T\partial r}\right) \qquad (1)$$

where n_1 and $\bar{n}_Z$ (θ averaged) are the densities of the light and Z ions, $\rho_1 = V_1/\omega_{c1}$, $V_1 = (2T/m_1)^{1/2}$ and $\tau_{1Z}^{-1} = 4\sqrt{2\pi}\,Z^2e^4 \mathrm{Log}\,\Lambda\,\bar{n}_Z/(3m_1^{1/2}T^{3/2})$. The coefficient X, which is of order 1 in the normal situation, is now of order $(R/r)^2$, $X \simeq (R^2/2r^2)$, for $n_Z Z^2/n_1 < (r/R)^{1/2}$ and of order $(R/r)^{3/2}$, $X \simeq (0.7 + 0.4\,n_1/n_Z Z^2)\,(R/r)^{3/2}$, for $n_Z Z^2/n_1 > (r/R)^{1/2}$. The coefficient X is given here for small $b = \Omega^2R^2/V_1^2$, and increases with b,

because the light ions are trapped not only by the usual force $-\nabla_{//}\mu B$ but also by the centrifugal force $-\nabla_{\perp} G_1$ (corrected by the self consistent electrostatic field insuring neutrality). For small values of b, the coefficient α in (1) has the same type of dependance on Z_{eff} as when the Z ions are in the banana regime [3] ranging from + 0.2 for $Z_{eff} = 0$ to + 0.5 for $Z_{eff} \gg 1$. It is also increased for finite values of b, as shown on table (1), because the trapping force $-\nabla_{\perp} G_1$ on light ions is more effective at low energy than the force $-\nabla_{//}(\mu B)$. The rotation is favourable for values of $\eta = d\mathrm{Log}T/d\mathrm{Log}\, n_1$ larger than the quantity α^{-1}, which might be given values ~ 2 even for low $n_Z Z^2/n_1$. Due to its large value, ϕ_Z^{NC} could dominate the turbulent flux of Z ions and the neoclassical purification effect of the thermal gradient could fully play its role.

II. Effects on the turbulent flux of impurities.

The present experimental evidence shows that the turbulent flux ϕ_Z^T of the Z ions is of the same order as the neoclassical flux ϕ_Z^{NC} Moreover, it is widely accepted [4] [5] that a significant part of ϕ_Z^T is proportionnal to the gradient $\partial \bar{n}_Z/\partial r$, $\phi_Z^T \sim D \frac{\partial \bar{n}_Z}{\partial r}$, rather than to $\partial n_1/\partial r$ or $\partial T/\partial r$ for instance. According to the quasilinear theory, a turbulent mode having an azimuthal wave number M around the major axis, frequencies ω and $\omega' = \omega - M\Omega$ in the laboratory frame of reference and in the frame of reference where the electrostatic field vanishes, and a small wave number along the flux lines, induces a flux ϕ_Z^T proportionnal to the difference between its phase velocity ω'/M and the diamagnetic velocity Ω_{DZ} of the Z assembly. We have

$$\phi_Z^T = \int I\left(\frac{\omega'}{M}\right) K\left(\frac{\omega'}{M} - \Omega_{gZ}\right) e \frac{c}{B}\left(\frac{\omega'}{M} - \Omega_{DZ}\right) d\left(\frac{\omega'}{M}\right) \qquad (2)$$

$$\Omega_{DZ} = \Omega_Z^* + \Omega_{gZ} \; ; \; \Omega_Z^* = \frac{T}{R}\frac{\partial \bar{n}_Z}{\bar{n}_Z \partial r}\frac{c}{Ze B_\theta} \; ; \; \Omega_{gZ} = -\left(m_Z - Z\frac{m_1}{2}\right)\Omega^2 R \frac{c}{Ze B_\theta} \; ;$$

where $I(\frac{\omega'}{M})$ is the amplitude spectrum of the modes and K is a positive even function which reflects the irreversible coupling of the Z ions with the mode (ω', M). As long as values of $\frac{\omega'}{M} \gg \Omega_Z^*$ are concerned in the integral (2), the flux ϕ_Z^T, if we exclude exact compensation between positive and negative values of ω'/M, poorly depends on the gradient $\partial \bar{n}_Z/\partial r$. The experimental fact: $\phi_Z^T \sim D\frac{\partial \bar{n}_Z}{\partial r}$ means that the turbulent modes which are responsible for ϕ_Z^T have small values of $\frac{\omega'}{M}$

more or less of the order of Ω_Z^* . We may first assume that these modes consist of a special group with values of ω'/M close to 0, within an interval $\sim \Omega_Z^*$. The flux ϕ_Z^T is then affected by the centrifugal diamagnetic velocity Ω_{gZ} , taking the form : $\phi_Z^T = D\left(\frac{\partial \bar{n}_Z}{\partial r} - \bar{n}_Z\left(m_Z - Z\frac{m_i}{z}\right)\frac{\Omega^2 R}{T}\right)$, and the equilibrium density $\bar{n}_Z$ for a given boundary condition at the wall r = a , is decreased by the factor $\exp\left(\int_a^r \left(m_Z - Z\frac{m_i}{z}\right)\frac{\Omega^2 R}{T}\,dr\right)$, which may be significant if $m_Z \Omega^2 R r \gg T$.

In fact, it is more plausible that the turbulent flux ϕ_Z^T is due to the interaction of the Z ions with the turbulent modes which have been observed in several Tokamak experiments[6] [7], in the form of a broad spectrum $I\left(\frac{\omega'}{M}\right)$ exhibiting a maximum for $\frac{\omega'}{M}$ of the order of the electron diamagnetic frequency $\Omega_e^* = -\left(T\,\partial n_i/n_i \partial r\right) c/e B_\theta R \gg -\Omega_{DZ}$ and a width $\sim |\Omega_e^*|$. As explained above the coefficient $K\left(\frac{\omega'}{M}\right)$ must have a narrow width $\gamma/M \ll |\Omega_e^*|$ so that in the normal case the asymetry of the spectrum $I\left(\frac{\omega'}{M}\right)$ along the electron diamagnetic velocity Ω_e^* does not induce a dominant term

$$\phi_Z^{T*} = \int I\left(\frac{\omega'}{M}\right) K\left(\frac{\omega'}{M}\right) \frac{\omega'}{M} \frac{c}{Ze B_\theta}\, d\left(\frac{\omega'}{M}\right) \qquad (3$$

in the expression of ϕ_Z^T. If this term did exist, it would correspond to an outwards flux ϕ_Z^T, i.e., to a purification effect. Such an effect could actually occur in presence of a gradient $\partial\Omega(r)/\partial r$ of the angular plasma velocity $\Omega(r)$. Indeed the resonance condition of the Z ions with the mode (ω, M) on a given magnetic surface r is $\omega' = \omega - M\,\Omega(r) = 0$ (discarding the effect of Ω_{gZ}^*) and take place within the Landau width $\delta\omega \sim \left(D M^2 (\partial\Omega/\partial r)^2\right)^{1/3}$, where D is the transverse diffusion coefficient of the Z ions. Assuming that the modes on the surface r have the same type of spectrum $I\left(\frac{\omega'}{M}\right)$ as in absence of rotation, the term ϕ_Z^{T*} should be dominant in the expression of ϕ_Z^T if $\delta\omega$ is a significant fraction of ω_e^*, i.e., for $(qM/r)\,\rho_i / K_\perp \rho_i \sim 1$ if we have

$$\left(R\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{1}{v_i}\right)^{2/3} D^{1/3} \sim \rho_i^{2/3} v_i^{1/3} \left(\frac{qR}{r}\right)^{2/3} \frac{\partial n_i}{n_i \partial r}$$

a condition which could be satisfied at the plasma edge ($D \sim 10^4\ cm^2/s$).

III. Stability in presence of Rotation.

The rotation introduces two effects which may produce instabilities : the centrifugal forces and the gradient $\partial\Omega/\partial r$ of the plasma angular velocity $\Omega(r)$. The centrifugal forces should affect the interchange MHD

modes by reducing the magnetic well. The plasma tends to displace towards the half equatorial plane $\theta = 0$ according to the law $n_1 = \bar{n}_1 (1 + m_1 \Omega^2 R r \cos\theta / 2T)$ so that the average curvature $1/\mathcal{R}$ is perturbed by $(m_1 \Omega^2 R^2 / 4T) r/R^2$. The guiding center drifts induced by the centrifugal forces may be considered as equivalent to the same perturbation, so that the average curvature becomes $1/\mathcal{R} + (m_1 \Omega^2 R^2 / 2T) r/R^2$. Assuming $\beta_\theta \ll 1$ for example, we have [8] $1/\mathcal{R} = (1 - 1/q^2) r/R^2$ and the magnetic well is preserved as long as $m_1 \Omega^2 R^2 / T < 1$. On the other hand, the shear stabilization of the modes should remain unchanged.

While the rotation could produce new electromagnetic instabilities, and even non linear turbulent states of the hydrodynamic type, we will consider only the linear stability of electrostatic modes. The gradient $\partial\Omega/\partial r$ introduces a destabilizing term in the dispersion relation of these modes, through the circulating particles, which is similar to the term arising from the ion thermal gradient $\partial T/\partial r$. Neglecting the irreversible response of electrons, it is convenient to write this dispersion relation, for the mode $\delta\Psi = \Psi(r) \exp i(\omega t - l\theta - M\varphi)$ in the form

$$\mathcal{L}(\omega) = \int \frac{n_1 e^2}{T} |\Psi(r)|^2 (2 - A_1)\, dr = 0 \qquad (4)$$

$$A_1(r) = \left\langle \frac{\omega - M\Omega - M\Omega_1^* \left(1 + \eta\left(\frac{V^2}{V_1^2} - \frac{3}{2}\right)\right) - M\chi V_{//}}{\omega - M\Omega - K_{//} V_{//}} |X(V_{//}, V_\perp, r)|^2 \right\rangle$$

where $\Omega_1^* = \frac{T}{R} \frac{\partial n_1}{n_1 \partial r} \frac{c}{eB_\theta}$, $\chi = m_1 \frac{\partial \Omega R}{R \partial r} \frac{c}{eB_\theta}$,

the coupling coefficient X is < 1 (in absence of toroidal effects $X = J_0 (K_\perp \frac{V_\perp}{\omega_{c1}})$) and $\langle\ \rangle$ means averaging over the Maxwellian for light ions. Marginal instability of a mode localized on a given surface implies that $\mathcal{I}m(A_1) = 0$ and $\mathcal{R}e(A_1) = 2$. For $K_\perp V_\perp / \omega_{c1} \ll 1$, $|X| \simeq 1$, this occurs if $\frac{1}{4} \frac{\chi^2 V_1^2}{\Omega_1^{*2}} = \left(\frac{\partial \Omega R}{V_1 \partial r} \Big/ \frac{\partial n_1}{n_1 \partial r}\right)^2 = \eta(2 - \eta)$ on the surface where $\omega - M\Omega(r) = -M\Omega_1^*(1 - \eta/2)$. These modes are similar to the modes due to the ion thermal gradient, normally unstable for $\eta > \eta_{cr} \simeq (1 \div 2)$.[9] In presence of rotation, the critical value of η is reduced by a small amount as long as $(\partial \Omega R / V_1 \partial r) \ll (d \log T / \partial r)$. It does not seem that the modes due to $\partial T/\partial r$ have been observed at a dangerous level in present experiment even when $\eta > \eta_{cr}$. This is probably due to the magnetic shear which localize radially the mode over a distance $\Delta_1 r$, roughly estimated by noting that the integral $\int A_1 |\Psi|^2 dr$

is at most of order $|\Psi|^2(\mathcal{O}(\eta M\Omega_1^*))/(v_1\partial K_{//}/\partial r)$: it then results from (4) that $\Delta_1(r) \lesssim (\rho_1 qR/r)(r\,dq/q\,\partial r)^{-1} \sim \rho_1 qR/r$. It may be verified that the flux ϕ_Z of Z ions due to these modes is directed outwards if η is smaller than the critical value η_{cr} due to $\partial T/\partial r$ alone. In principle the fact that the rotation induces unstability for $\eta<\eta_{cr}$ may be favourable for plasma purification. However, if $\eta<\eta_{cr}<2$, the neoclassical effects are likely to be unfavourable and should therefore be dominated by the turbulence effects.

The rotation may have a stabilizing effect on the trapped ion modes, [10] which are not localized by the magnetic shear and could be dangerous in a reactor. For instance, the modes due to ion thermal gradient [11] [12] have the dispersion relation (4), with A_1 replaced by

$$A_1 = \left\langle \frac{\omega - M\Omega(r) - M\Omega_1^*\left(1+\eta\left(\frac{v_\perp^2}{v_1^2}-\frac{3}{2}\right)\right)}{\omega - M\Omega(r) - M\Omega_{g1}^*\, v_\perp^2/v_1^2} \times\sqrt{\frac{r}{R}}\right\rangle$$

where Ω_{g1}^* is the thermal angular precession velocity $-(m_1 v_1^2/2R^2)$ c/e B_θ. For $\Omega(r)=0$, expressing that $\mathrm{Im}(A_1) = \mathrm{Re}(A_1)-2 = 0$, one obtains a marginally unstable mode for $\eta>2/3$ and $\omega - M\Omega(r) \simeq M\Omega_{g1}^*$. The mode may exist over a large interval $\Delta_2 r \sim r$. However the gradient $\partial\Omega/\partial r$ decreases the possible value of $\Delta_2 r$ by imposing an upper limit to the quantity $\int A_1|\Psi|^2 dr \lesssim |\Psi|^2(r/R)^{1/2}\mathcal{O}(\Omega_1^*\eta)/(\partial\Omega/\partial r)$, so that we have from (4) : $\Delta_2 r \lesssim \rho_1 q(R/r)^{1/2}(rR\partial\Omega/v_1\partial r)^{-1}$. The mode is localized by the gradient $\partial\Omega/\partial r$ as the mode due to circulating ions by the magnetic shear ($\Delta_2 r \sim \Delta_1 r$) if $R\partial\Omega/v_1\partial r \sim (r/R)^{1/2}/r$, corresponding to a relatively small ratio $\Omega^2R^2/v_1^2 \sim r/R$.

IV Methods to induce the plasma rotation.

It is possible to transfer momentum to the plasma around the major axis by neutral injection or travelling waves at the velocity $V_\circ$. For a given applied force density P, the power density which must be invested is $V_\circ P$, and is minimized by choosing $V_\circ$ as close as possible of the plasma velocity ΩR. For $\Omega R \lesssim V_1$, the neutral injection, which would imply in practise $V_\circ \gg V_1$ is not economic. A magnetic pumping propagating at a velocity $V_\circ \sim \Omega R$ is more appropriate in principle. The induced force density P must balance the drags P_R due to ripples $\delta B = b\cos(M\varphi)$ of the static field B and $P_V \sim \mathrm{div}(\chi_v n_1 m_1 R\partial\Omega/\partial r)$ due to the viscosity. The power density $V_\circ P_V$ is then $\sim (\chi_v/\chi_\tau)(V_\circ^2/V_i^2)W_T$

where χ_T is the diffusion coefficient for ion energy transport and W_T is the power density which is necessary to maintain the ion thermal gradient. While in the banana regime the neoclassical value [13] of the ratio χ_v/χ_T is $\sim (r/R)^{3/2}$, it is probably more realistic to assume that $\chi_v/\chi_T \sim 1$. However we may also assume that in a reactor the ratio W_α/W_T, where W_α is the power density deposited by the α particles, is >> 1, so that we could have $V_\circ P_v/W_\alpha << 1$ even if $V_\circ$ is a significant fraction of the ion thermal velocity V_1. The power density $V_\circ P_r = \sqrt{\pi}(M V_1/R)(b/B)^2(n_1 m_1 V_\circ^2/2)$ due to the ripple drag is very large even for small values of the ratio b/B. For instance, if $n_1 = 10^{14}\,cm^{-3}$, T = 10 keV, $V_\circ = V_1/3$, R/M = 50 cm, we must have b/B < $2\,10^{-4}$ to have $V_\circ P_R < W_\alpha/100$. The need for very small ripples is certainly a major practical difficulty for achieving substantial plasma rotation.

A conventionnal compressionnal magnetic pumping $\delta B = b\cos(\omega t - M\varphi)$, travelling at the velocity $V_\circ = \omega/M = 2\Omega R$ for instance, could sustain the rotation for small values of b/B $\sim (\chi_v R/r^2 M V_1)^{1/2}$, with the usual drawback however that only a small fraction $\sim \beta$ of the flux of the Maxwell tensor $\delta B_r \delta B_\varphi/4\pi$ at the plasma edge is absorbed by the plasma, resulting in relatively large losses in the coil system. It could be more efficient to use a torsionnal magnetic pumping induced at the edge by helical currents $\sim \exp i(\omega t - l\theta - M\varphi)$, with the velocity $V_\circ = \omega/M$ equal to the plasma velocity ΩR on the surface where $q = q_\circ = -\frac{1}{M}$. The magnetic perturbation then produces magnetic islands near this surface. It imposes the velocity $V_\circ$ to the plasma in these islands [14] [15], which in turn imposes a decreasing velocity outside up to the edge by viscosity. Actually the plasma in the islands is at rest with respect to the islands if the viscosity forces from outside are not able to impose it a significant motion along the flux lines across the modulation $\sim (r/R)\cos\theta$ of the static field. In the banana regime, this condition imposes a minimum island width $\sim (\chi_v/\nu_c r^2)(R/r)^{1/2}$, easily achieved. The momentum transfer is then only limited by the flux of the Maxwell tensor $\delta B_r \delta B_\varphi/4\pi \simeq (2/q_\circ R)\delta B_r \delta B_\theta/4\pi$ at the edge $r = a$. With $\delta B_r \sim \delta B_\theta$, we must have $\delta B_r/B \sim \beta^{1/2}(q_\circ \chi_v R/V_1 r)^{1/2}(V_\circ/V_1)^{1/2}$.

In a reactor, a plasma rotation could be in principle achieved without external action. Ripples $\delta B = b\cos M\varphi$ of the static field are

indeed resonant with the precession motion at the angular velocity $\Omega_{g\alpha} = (E/R^2)(c/2eB_\theta)$ of the banana trapped α particles of energy E if $\Omega = -\Omega_{g\alpha}$. The velocity $R\Omega_{g\alpha}$ may be a significant fraction of the thermal velocity V_1. If this resonance is achieved, the trapped α assembly experiences a strong coupling with the ripples and tend to be at rest in the ripple frame. This means that the plasma experiences a force F_α from the ripples which tends to give it a velocity opposite to the diamagnetic velocity $\sim (E/r)(c/2eB_\theta) \gg R\Omega_{g\alpha}$ of the α assembly. Of course the plasma experiences an opposite force F_R due to the drag of the ripples on the thermal ions. The condition $F_\alpha > F_R$, necessary for the rotation to be sustained, may be written $(S\tau E/n_1 T)(V_1/\Omega R) \exp(\Omega^2 R^2/V_1^2)(R/r)^{1/2} X > 1$, where S is the production rate of the α particles ($cm^{-3}s^{-1}$), τ is the slowing down time $(dE/Edt)^{-1}$ and X is a geometrical coefficient which may be given a value $\simeq 1$ by taking M = 1 and properly shaping the ripple field δB along the major radius R. This condition is independant of n_1 and may be (rather marginally) satisfied for $\Omega R \sim V_1$ if $T \simeq 20$ keV. The power liberated by the radial diffusion of banana α particles, and disponible to sustain the rotation, is only a fraction $(r/R)^{3/2}$ of the α power density W_α. The rotation is sustained if $\Omega R P_v < (r/R)^{3/2} W_\alpha$, i.e. if $\chi_v / r^2 < (r/R)^{3/2} W_\alpha / n_1 m_1 (\Omega R)^2$.

V Conclusion

A plasma rotation may have a beneficial effect on the impurity behaviour through neoclassical and turbulent transport. It may improve the stability of the trapped ion modes. It could be tested in present experiments (with small ripples of the main field) using neutral injection or magnetic pumping. In a reactor it could be achieved by direct conversion of α power.

$n_z Z^2/n_1$ \ b	0	0.2	0.4	0.6	1
0	0.18	0.3	0.36	0.4	0.45
0.5	0.35	0.5	0.58	0.61	0.67
1	0.39	0.56	0.64	0.68	0.73
∞	0.5	0.7	0.76	0.80	0.85

Table 1 : Values of α versus $b = \Omega^2 R^2/v_1^2$ and $n_z Z^2/n_1$.

REFERENCES

[1]. DEICAS, R., SAMAIN, A., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1974, IAEA, Vienna (1975) Vol. I, 563.

[2]. HAZELTINE, R.D., WARE, A.A., Nuclear Fusion 16 (1976) 538

[3]. CONNOR, J.W., Plasma Physics 15 (1973) 765.

[4]. MERCIER, C., WERKOFF, F., MORERA, J.P., Rapport EUR-CEA-FC-997.

[5]. DUCHS, D.F., POST, D.E., RUTHERFORD, P.H., Nuclear Fusion 17 (1977) 565.

[6]. Equipe TFR in Plasma Physics and Nuclear Fusion Research 1976, IAEA, Vienna (1977) Vol. I, 35.

[7]. GOLDSTON, R.J., MAZZUCATO, E., SLUSHER, R.E., SURKO, C.M., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1976, IAEA, Vienna (1977) Vol I, 371.

[8]. MERCIER, C., in Lectures in Plasma Physics, Commission of the European Communities, Luxembourg (1974) 94.

[9]. KADOMTSEV, B.B., POGUTSE, O.P., in Reviews of Plasma Physics, Consultant Bureau, New-York (1970) 308.

[10]. KADOMTSEV, B.B., POGUTSE, O.P., Nuclear Fusion 11 (1971) 67.

[11]. LIU, C.S., Physics Fluids 12 (1969) 1489

[12]. PELLAT, R., TAGGER, M., Rapport EUR-CEA-FC-977.

[13]. ROSENBLUTH, M.N., RUTHERFORD, P.H., TAYLOR, J.B., FREEMAN, E.A., KOVRIZHNIKH , L.M., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1971, IAEA, Vienna, (1971) Vol. I, 495.

[14]. REBUT, P.H., SAMAIN, A., in the Proceedings of the Vth European Conference on Controlled Fusion, Grenoble (1972) Vol. I, 29, Vol. II, 232.

[15]. BISKAMP, D., Nuclear Fusion 19, (1979) 777.

NEW CALCULATION OF ION CONDUCTION DUE TO MAGNETIC RIPPLE IN LARGE TOKAMAK

G. REQUIN, B. GAGEY, J.P. GIRARD and A. SAMAIN

ASSOCIATION EURATOM-CEA SUR LA FUSION
Département de Recherches sur la Fusion Contrôlée
Centre d'Etudes Nucléaires
Boîte Postale n°6. 92260 FONTENAY-AUX-ROSES (FRANCE)

ABSTRACT

The ion heat conduction due to the ripple diffusion in Tokamaks is calculated in a relatively simple way for various regime of ripple amplitude, of ratio (r/R) and of collision frequency. The most important term of the ion heat conduction due to ripple trapping is found very similar to the one already known but the other terms due to banana drifts or Landau effects differ from previous results what decreases the expected losses at the plasma boundary. In order to illustrate these calculations we apply our results to TFR 600 Tokamak with large ICR Heating and we find that the INTOR basic configuration has so important magnetic ripples that ignition does not seem possible unless the central ripple value is reduced five times.

I - INTRODUCTION

It has been shown elsewhere [1] that the set of the Fokker Planck equations can be put in a simplified variational form. The detailed structure of the distribution functions of particles near the resonant surfaces are eliminated so that the general variationnal principle has a simpler form, involving only regular variables. The principal result to be used here is that the evolution in time of the main characteristics of the distribution function is obtained by extremalising the functionnal :

$$\dot{\mathcal{M}}(\underline{n},\underline{T}) = \sum_{\text{Particles species}} \left\{ \dot{\Sigma}(\underline{n},\underline{T}) + \dot{S}(\underline{n},\underline{T}) + \delta\dot{\mathcal{M}}(\underline{n},\underline{T},\underline{\Psi}) \right\}$$

for all variations of $\underline{n}(r)$, $\underline{T}(r)$ near $n(r)$, $T(r)$ (respectively the density and temperature profiles of the considered assembly of particles) and of $\underline{\psi}(r)$ near $\psi(r)$ the electrostatic potential. The functionnal $\dot{\Sigma}(\underline{n},\underline{T})$ is given by $\dot{\Sigma}(\underline{n},\underline{T}) = 2\int\!\!\int \left(\frac{\partial n}{\partial t} \text{Log } \underline{n} + \frac{3}{2} \frac{n}{T} \frac{\partial T}{\partial t} \text{Log } \underline{T} \right) dV$, dV being the volume enclosed between two magnetic surfaces of a Tokamak configuration for our case ; the functionnal $\dot{S}(\underline{n},\underline{T})$ is the rate of entropy production in the plasma when $\underline{n} = n$, $\underline{T} = T$ and plays a negligible role in the following. The additionnal functionnal $\delta\dot{\mathcal{M}}(\underline{n}, \underline{T}, \underline{\psi})$ depends on the corrections which must be superimposed to the basic toroidal field $B_\varphi = B_0$ = constant to restore the real toroidal field taking into account the (r/R) like variation and the ripple perturbation due to the finite number of toroidal coils. The functionnal $\delta\dot{\mathcal{M}}$ has been calculated in various regimes of ripple amplitude, of ratio $\varepsilon = (r/R)$ and of collision frequency, the results are listed below and from these expressions we get the corresponding values of the ion heat conduction coefficients.

II - NEOCLASSICAL COEFFICIENTS

When the radial variation of the static magnetic field is taken into account, i.e. when a field $\delta B = \varepsilon B_0 \cos\Theta$, Θ being the poloidal angle, is added to B_0 the functionnal $\delta\dot{\mathcal{M}}_\varepsilon(\underline{n}, \underline{T}, \underline{\psi})$ may be written for the ion assembly [1] :

i) in the Plateau regime where $\nu_{ii} > v_i\, \varepsilon^{3/2}/qR$:

$$\delta\dot{\mathcal{M}}_\varepsilon^P = \int -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\pi)^4}{2} \left(\frac{c\,T_i}{e\,B_0}\right)^2 R^2 \varepsilon^2 \frac{n q R\, m_i^{1/2}}{T_i^{1/2}} \left[\frac{\partial \underline{n}}{\underline{n}\,\partial V} - \frac{e}{T}\frac{\partial \Psi}{\partial V} + \left(\frac{e}{2\pi c}\right)\left(\frac{B_0}{2\pi R}\right)\frac{C}{q} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial \underline{T}}{\underline{T}\,\partial V} \right]^2 x^2 \exp -x \; dx\, dV$$

where $\nu_{ii} = \dfrac{4\sqrt{2\pi}\, n e^4 \mathrm{Log}\,\Lambda}{3\, m_i^{1/2} T_i^{3/2}}$ is the ion-ion collision, $v_i = (2T_i/m_i)^{1/2}$, $q(r)$ is the safety factor, ψ is the electrostatic potential of the radial electric field, $C(V)$ is independant of the considered assembly and results from the minimization to 0 of the functionnal S.

ii) in the banana regime where $\nu_{ii} < v_i \varepsilon^{3/2}/qR$:

$$\delta\dot{\mathcal{M}}_\varepsilon^B = \int -1.46(2\pi)^4 \left(\frac{c\,T_i}{e\,B_0}\right)^2 R^2 \varepsilon^{1/2} \frac{n(qR)^2 m_i}{T_i} \nu_{ii} \left[\frac{\partial n}{n\,\partial V} - \frac{e\,\partial\psi}{T\,\partial V} + \left(\frac{e}{2\pi c}\right)\left(\frac{B_0}{2\pi R}\right)\frac{C}{q} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T\,\partial V}\right]^2 \left(\Phi(x) - G(x)\right) \exp -x^2\, dx^2\, dV$$

where $\Phi(x)$ and $G(x)$ are the Spitzer functions [2] ; using these expressions of $\delta\dot{\mathcal{M}}_\varepsilon$, we can go on with the minimization of $\dot{\mathcal{M}}_0(\underline{n}, \underline{T})$ which now writes : $\dot{\mathcal{M}}_0(\underline{n}, \underline{T}) = \dot{\Sigma}(\underline{n}, \underline{T}) + \delta\dot{\mathcal{M}}_\varepsilon(\underline{n}, \underline{T}, \underline{\psi})$. Minimization with respect to $\underline{\psi}$ gives the value of $\underline{\psi}$ which ensures the ambipolarity of the particle flux, then the minimization with respect to Log $\underline{T}$ results in an equation of the form

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial T_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi_i\, n \frac{\partial T_i}{\partial r}\right)$$

where $\chi_i(\mathrm{cm}^2\mathrm{s}^{-1})$ is the ion heat conduction coefficient. We then get the well known neoclassical coefficients[3] :

$$\chi_i^P = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}(qR)\left(\frac{m_i}{T_i}\right)^{1/2}\left(\frac{c\,T_i}{e\,B_0 R}\right)^2$$

$$\chi_i^B = 0.95\, \frac{q^2 R^2}{\varepsilon^{3/2}}\, \frac{m_i \nu_{ii}}{T_i}\left(\frac{c\,T_i}{e\,B_0 R}\right)^2$$

All quantities are expressed in C.G.S. units and temperature in energy unit.

III - RIPPLE COEFFICIENTS

We now take into account the ripple field in the analytic form $\delta B = B_0\, \delta(r) \exp -\beta\theta^2 \cos N\varphi$, φ being the toroidal angle, valid for a broad class of existing and future Tokamaks possessing N toroïdal coils. New corrections $\delta\dot{\mathcal{M}}_\delta(\underline{n}, \underline{T}, \underline{\psi})$ must be added to the functionnal $\dot{\mathcal{M}}_0(\underline{n}, \underline{T})$ and several regimes are to be considered :

i) a regime of effective trapping of particles in the ripple wells, defined by $\alpha_0 \exp\beta\theta^2 \ |\sin\theta| < 1$, where $\alpha_0 = \varepsilon/Nq\delta(r)$ and $\nu_{ii} < \delta^{3/2}(v_i N/R)$:

$$\delta\dot{\mathcal{M}}_\delta^R = \int -(0.76)\, 2^{3/2}\pi^3 \delta(r)^{3/2} \varepsilon^2 \left(\frac{c\,T_i}{e\,B_0}\right)^2 \frac{n R^2 J(\alpha_0,\beta)}{\nu_{ii}} \left(\frac{\partial n}{n\,\partial V} - \frac{e\,\partial\psi}{T\,\partial V} + \left(\frac{e}{2\pi c}\right)\left(\frac{B}{2\pi R}\right)\frac{C}{q} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T\,\partial V}\right)^2 x^4 \exp -x\ dx\ dV$$

where $J(\alpha_0, \beta) = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} (1 - \alpha_0 \sin\theta \exp\beta\theta^2)^{11/4} \exp(-\frac{3}{2}\beta\theta^2) \sin^2\theta\, d\theta$; $\alpha_0 \exp\beta\theta^2 |\sin\theta| < 1$, this integral has been computed for several typical β values (fig. 1).

ii) a "Banana Ripple" regime where $\alpha_0 \exp\beta\theta^2 |\sin\theta| > 1$ while the collisions are maintained at a small value $\nu_{ii} < (v_i N/R)\, \varepsilon^{3/2}(N^3 q^3)^{-1}$, thus

$$\delta\dot{\mathcal{M}}_\delta^{BR} = \int -\frac{2^{11/2}\pi^3}{3} \delta(r)^2 \varepsilon^{3/2} \left(\frac{c\,T_i}{e\,B_0}\right)^2 \frac{n R^2 I\, J'(\alpha_0,\beta)}{(qN)^2 \nu_{ii}} \left(\frac{\partial n}{n\,\partial V} - \frac{e\,\partial\psi}{T\,\partial V} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T\,\partial V}\right)^2 x^4 \exp -x\ dx\ dV$$

where $I = \int_0^{2qN} J_0^2(z)\, z\, dz \simeq 2qN/\pi$ for $qN \gg 1$, and $J'(\alpha_0,\beta) = (2\pi)^{-1} \int_{0;\alpha_0\exp\beta\theta^2|\sin\theta|>1}^{2\pi} \exp(-2\beta\theta^2) d\theta$, this integral is plotted on fig. 2 for several β values.

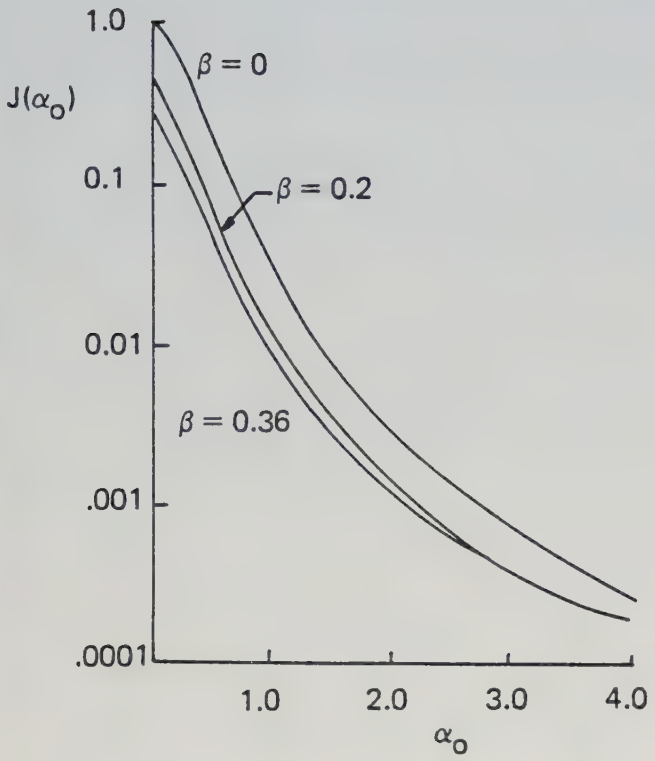


FIG. 1 : $J(\alpha_o)$ for the effective trapping regime.

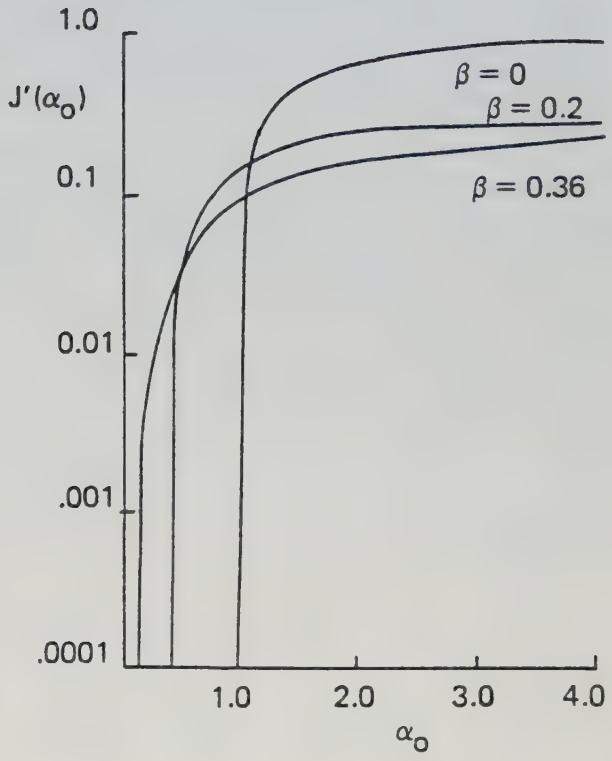


FIG. 2 : $J'(\alpha_o)$ factor for the "banana ripple" regime.

iii) a "Plateau Ripple" regime where $\alpha_0 \exp\beta\theta^2 |\sin\theta| > 1$ and $\nu_{ii} > (\nu_i N/R)\,\varepsilon^{3/2}(N^3 q^3)^{-1}$:

$$\dot{\delta W}_\delta^{PR} = \int \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\pi)^4}{2} \delta(r)^2 \left(\frac{c T_i}{e B_0}\right)^2 \frac{n R^3 m^{1/2}}{T^{1/2}} N q^2 J''(\alpha_0,\beta) \left(\frac{\partial n}{n \partial V} - \frac{e}{T}\frac{\partial \Psi}{\partial V} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial T}{T \partial V}\right)^2 x^2 \exp -x \, dx \, dV$$

where $J''(\alpha_0,\beta) = (\pi)^{-1} \int_{0;\ \alpha_0 \exp\beta\theta^2 |\sin\theta| > 1}^{2\pi} \exp(-2\beta\theta^2) \cos^2\theta \, d\theta$, this integral is plotted on fig. 3 for several β values.

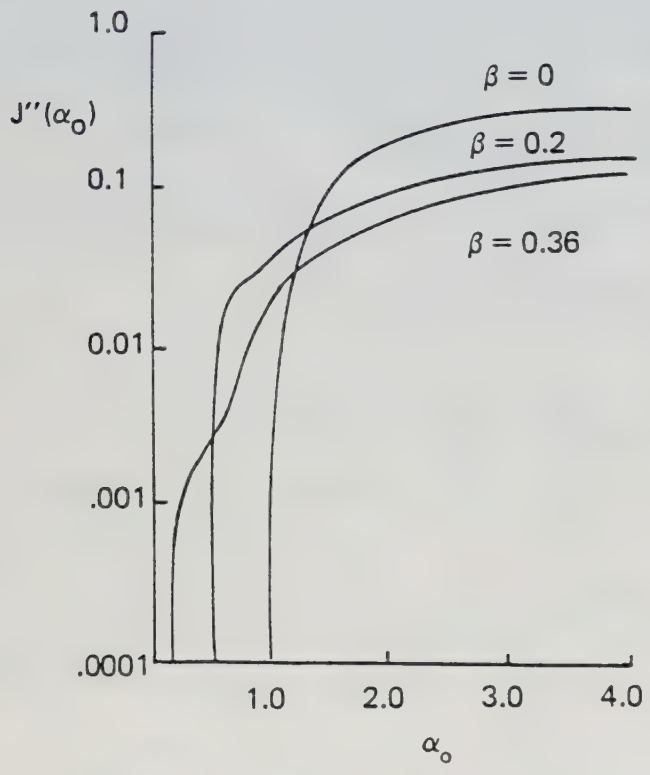


FIG. 3 : $J''(\alpha_0)$ factor for the "plateau ripple" regime.

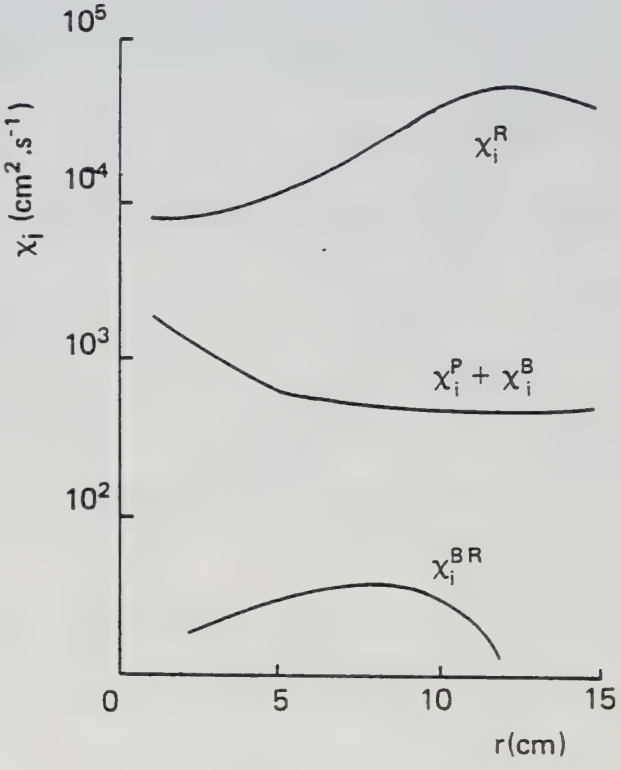


FIG. 4 : Heat conduction coefficients in TFR 600.

The same variationnal procedure as before, again ensuring an ambipolar flux of particles, then lead to the following ripple ion heat conduction coefficients :

i) the "pure ripple" coefficient :

$$\chi_i^R = 41 \frac{\delta(r)^{3/2}}{\nu_{ii}} \left(\frac{c T_i}{e B_0 R}\right)^2 J(\alpha_0,\beta)$$

ii) the "banana ripple" coefficient :

$$\chi_i^{BR} = 22.9 \frac{\delta(r)^2}{\nu_{ii}} \frac{1}{q N \varepsilon^{1/2}} \left(\frac{c T_i}{e B_0 R}\right)^2 J'(\alpha_0,\beta)$$

iii) the "plateau ripple" coefficient :

$$\chi_i^{PR} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\delta(r)^2 N q^2 R}{\varepsilon^2}\left(\frac{c\,T_i}{e\,B_o R}\right)^2 J''(\alpha_o,\beta)$$

These coefficients differ from the previously known [4][5][6] essentially by the presence of the $J'(\alpha_o,\beta)$ and $J''(\alpha_o,\beta)$ factors which decrease strongly the heat conduction for small values of $\alpha_o = \varepsilon/Nq\,\delta(r)$.

IV - APPLICATIONS

These coefficients have been inserted in the numerical code developed at Fontenay-aux Roses [7] and applied to several machines with their planned heating schemes.

In the TFR 600 Tokamak plasma centered at R=98cm the magnetic field ripple can be written $\delta(r,\theta) = 10^{-3}\exp(0.186r)\exp(-0.36\theta^2)$ and whatever the plasma current and q values are, the ripple is effective in a large zone of the plasma. The figure 4 shows the values of the ion heat conduction coefficient versus radius for a high density plasma ($n_e(o)=6.10^{13}$ cm^{-3}), note that the coefficient χ_i^{RP} is negligible. For a RF heating power of 2.4 MW, the central ion temperature is limited to 3.5 KeV, due to the ripple heat conduction. Let us now suppose we push the plasma 4cm inside, i.e. , in the high field region, the magnetic field ripple can then be written $\delta = 4.6\ 10^{-4}\exp(0.18r)\exp(-0.2\ \theta^2)$ and for the same density and RF heating power, the central ion temperature rises to 5.9 KeV. We have then the possibility to test the importance of the ripple losses which evidence has been brought accidentaly in PLT [8]. Moreover the calculation done in the TFR 600 case seem to show that ripple losses present a sort of threshold below which ion losses become less than the electron heat conduction losses ($P_{Ion\ losses} \sim (1/3 \div 1/2)\ P_{electron\ losses}$) and do not prevent the plasma ion temperature to be very close to the value expected in absence of ripple.

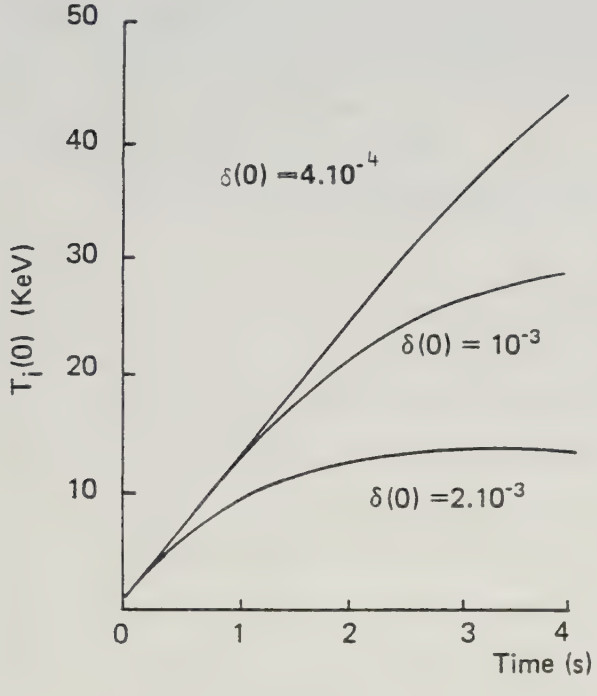


FIG. 5 : Evolution of the central temperature during neutral injection in INTOR.

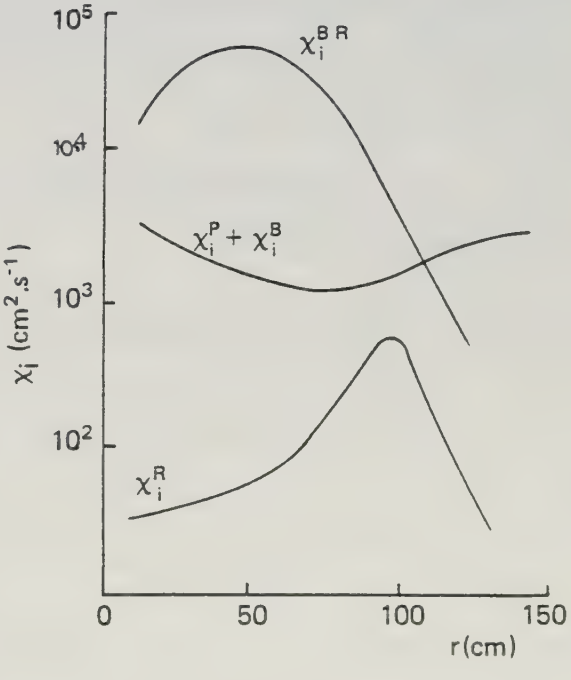


FIG. 6 : Heat conduction coefficients in INTOR.

We have studied the basic INTOR configuration [9] whose caracteristics are ; R=480cm, a=150cm, B_φ=5T, N=12 coils, $I_p=4.10^6$A and $\delta(r,\theta) = (0.2 + 1.8\,\frac{r^2}{a^2})\times10^{-2}\exp(-0.2\ \theta^2)$. The

plasma is heated by 80 MW of fast neutral injection at 200 KeV (perpendicular injection), and the evolution of the central ion temperature, taking $n_i(o) = 10^{14} cm^{-3}$, is represented on fig. 5 as it results from our numerical code for three different values of the central ripples ; it is only in the case where $\delta(o) = 4.10^{-4}$ that ignition is reached after 4.5s of neutral beam injection, the ripple is no more effective, so χ_i^R becomes small but the "banana ripple" conduction is now the most important way of ion heat losses in the inner part of the plasma (fig. 6).

V - CONCLUSION

The new treatment of the ion heat conduction done in presence of the magnetic field ripple allows us to derive the ion heat conduction coefficients which cover the usual and expected collision frequency range and to apply them to numerical simulations. In the case where the ripple is effective the ripple heat conduction coefficient is always dominant and limits strongly the performances to be reached in a given machine for a given value of the central ripple. For larger machines which will work at low ion collision frequency the requirement on the ripple value is very stringent for the ignition to be reached. So the magnetic field configuration of the planned machines which should preserve large access for neutral injection and present small ripple value should be carefully optimized between these conflictual requirements.

REFERENCES

[1] G. REQUIN, A. SAMAIN
Rapport EUR CEA n° 1031 - Mars 1980.

[2] L. SPITZER
in "Physics of Fully Ionized Gases" - Interscience Publishers (N-Y) 1956.

[3] J.W. CONNOR
Plasma Physics 15 (1973) 765.

[4] N.A. UCKAN et al
ORNL TM/5438 - June 1976.

[5] J.N. DAVIDSON
Nuclear Fusion 16 (1976) 731.

[6] A.H. BOOZER
PPPL Report 1619 - January 1980.

[7] J.P. GIRARD, M. KHELLADI, D.A. MARTY
Nuclear Fusion 13 (1973) 685.

[8] R.J. GOLDSTON
Private Communication - February 1980.

[9] INTOR Report - IAEA Vienna-October 1979.

PLAN ET TABLE DES MATIERES

Page

Résumé 7

A - Methodes variationnelles pour l'étude de l'évolution d'un plasma 11

I - Introduction 13
1) Position du problème 13
2) Principes généraux d'extrémum donnant l'évolution d'un plasma . 15

II - Principe variationnel simplifié pour une situation où les trajectoires sont intégrables dans un champ quasistatique 19
1) Etat stationnaire 19
2) Effet des collisions 21
3) Effet d'une dépendance temporelle de l'Hamiltonien 25

III - Principe variationnel simplifié en présence d'une perturbation résonante 27
1) Evolution due à une perturbation d'amplitude stationnaire 27
2) Evolution due à une perturbation dont l'amplitude est fonction du temps 34
3) Généralisations immédiates 35

IV - Généralisation du principe variationnel simplifié en présence d'une somme de perturbations résonantes 39
1) Evolution due à la présence d'une perturbation δH en régime Zakharov et Karpman creant un domaine piégé et d'une petite perturbation $\delta H'$ résonante dans ce domaine 40
2) Evolution dans une situation stochastique 43

V - Détermination du champ autocohérent dans le plasma 51

VI - Généralisation du principe variationnel simplifié à une situation où les trajectoires sont intégrables dans un champ quasistatique 57

B - Application des méthodes variationnelles à l'étude d'un plasma Tokamak

I - Introduction au Tokamak 63

II - Transport néoclassique dans une configuration Tokamak 71
1) Transport néoclassique des ions légers 71
2) Transport néoclassique des ions légers et des impuretés 77
a) Impuretés dans un régime faiblement collisionnel 77
b) Impuretés dans un régime collisionnel 80
3) Transport néoclassique des ions légers en présence de "ripple" toroïdal 84
4) Application en simulation numérique 90

III - Etude d'une configuration magnétique Tokamak en présence d'ilots .. 95
1) Application générale des principes variationnels à une telle situation 95
2) Evolution et rotation d'un ilot de faible extension 100
3) Application : mise en rotation du plasma à l'aide d'ilot magnétique 110

IV - Phénomènes de transport et stabilité dans un plasma Tokamak en rotation 113
1) Transport des ions légers en présence de rotation 113
2) Transport néoclassique des impuretés 116
3) Diffusion turbulente des impuretés en présence de la rotation du plasma 119
4) Etude de la stabilité du plasma en présence de rotation 123
5) Examen de quelques méthodes pouvant provoquer la rotation du plasma 128

V - Etude de deux schémas de purification d'un plasma Tokamak 131
1) Extraction d'ions lourds du plasma par un champ HF 131
2) Le "Divertor ergodique" 138

Conclusion 143

Bibliographie 147

Annexes

Annexe I - Variables angulaires et d'action en présence d'un Hamiltonien perturbé 153

Annexe II - Généralisation du principe variationnel simplifié en présence d'une perturbation de l'Hamiltonien (Démonstration) 159

Annexe III - Généralisation du principe variationnel simplifié en présence de deux perturbations résonantes dans le même domaine (Démonstration) 173

Annexe IV - Publication et communications 179